Capitolo 11

RAPPRESENTAZIONE DEI SISTEMI DISCRETI POSITIVI

Chiamiamo “positivi” i sistemi dinamici nei quali tutte le variabili di stato, così come quelle di ingresso e di uscita, se presenti, possono assumere soltanto valori non negativi.
Situazioni nelle quali le grandezze in gioco hanno significato esclusivamente quando ad esse si attribuiscano valori non negativi sono piuttosto frequenti, in ambito tecnologico (pressione, concentrazione, massa,...), biologico (numero di animali o di specie in un particolare ambiente, frequenza di ricombinazione,...), demografico (numero di individui in una classe di età, densità di una popolazione in una data regione, ...), economico (livello delle merci in un magazzino, quantità di beni prodotti, ...), etc. Il vincolo che in un sistema positivo tutte le grandezze in gioco siano non negative e che la legge di aggiornamento debba conservare tale proprietà si traduce, come è naturale aspettarsi, in condizioni piuttosto stringenti sulla natura delle equazioni di stato.

In questo capitolo ci soffermeremo soprattutto sui sistemi lineari discreti in evoluzione libera. I caratteri peculiari di cui sono dotate le matrici quadrate non negative impiegate per rappresentarne la dinamica consentono di trarre interessanti conclusioni sull'evoluzione di stato e, nel capitolo 13, di affrontare lo studio delle catene di Markov, che dei sistemi positivi costituiscono un esempio paradigmatico.
Premettiamo subito che una parte considerevole dell'analisi del comportamento in evoluzione libera si può condurre sul “grafo di influenza” o, equivalentemente, sulla immagine booleana del sistema, ricorrendo ad argomenti di natura combinatoria che prescindono dagli specifici valori degli elementi nelle matrici e nei vettori e tengono conto soltanto dal fatto che tali valori siano o non siano diversi da zero. Questa peculiarità vale non solo per la dinamica libera dello stato, ma anche per le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità, che costituiranno l'argomento del capitolo 12.

11.1 Rappresentazione dei sistemi lineari discreti positivi

Se consideriamo le equazioni di un sistema lineare discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{11.1}$$

ed imponiamo che, per ogni ingresso $\mathbf{u}(0)$ e per ogni stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ a componenti non negative, l'uscita $\mathbf{y}(0)$ e lo stato $\mathbf{x}(1)$ abbiano tutte componenti non negative, è immediato verificare che le matrici F, G, H e D non possono avere alcun elemento negativo.
Infatti, scegliendo $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ ed $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_i$ (l'i-esimo vettore della base canonica), lo stato $\mathbf{x}(1)$ e l'uscita $\mathbf{y}(0)$ sono costituiti dalla i-esima colonna di F e dalla i-esima colonna di H, che pertanto non possono contenere elementi negativi. Scegliendo $\mathbf{u}(0) = \mathbf{e}_i$ ed $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, lo stato $\mathbf{x}(1)$ e l'uscita $\mathbf{y}(0)$ sono costituiti dalla i-esima colonna di G e dalla i-esima colonna di D, che a loro volta non possono contenere nessun elemento negativo.

Viceversa, è ovvio che se F, G, H, D hanno tutti gli elementi non negativi, il sistema (11.1) avrà stati e uscite non negativi per ogni $t \geq 0$, quando $\mathbf{x}(0)$ sia non negativo e per ogni $t \geq 0$ siano non negativi i vettori di ingresso $\mathbf{u}(t)$.

11.1.1 Definizioni e notazioni per le matrici non negative

Nel seguito ricorreremo ad una nomenclatura apposita per le matrici e, in particolare, per i vettori i cui elementi siano non negativi. Se $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, porremo

- $M \gg 0$ se $m_{ij} > 0$ per ogni i, j: in questo caso diremo[1] che la matrice è "strettamente positiva";
- $M > 0$ se $m_{ij} \geq 0$ per ogni i, j e almeno un elemento della matrice è positivo: in questo caso la matrice M è "strettamente non negativa" (o "positiva");
- $M \geq 0$ se $m_{ij} \geq 0$ per ogni i, j, senza escludere il caso che possa aversi $M = 0$: la matrice M è in questo caso "non negativa".

Se M ed N sono matrici (in particolare vettori) di eguali dimensioni, porremo $M \gg N$, oppure $M > N$, oppure $M \geq N$, a seconda che $M - N$ sia strettamente positiva, strettamente non negativa o non negativa.
Fra i vettori di $\mathbb{R}^n$ è strettamente positivo il vettore $\mathbf{1}_n^T := [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]$, mentre sono strettamente non negativi i vettori $\mathbf{e}_i$ della base canonica. Chiameremo *vettori monomi* i multipli positivi dei vettori della base canonica, ovvero i vettori $\alpha\mathbf{e}_i,\ \alpha > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Se si intende specificare qual è la componente non nulla, $\alpha\mathbf{e}_i$ sarà detto i-monomio.

Alcune proprietà dei sistemi positivi dipendono soltanto dal fatto che gli elementi presenti nelle varie posizioni delle matrici siano o non siano diversi da zero, e non dai particolari valori assunti dagli elementi positivi. Lo studio di tali proprietà può essere affrontato rappresentando vettori e matrici sull'algebra di Boole a due elementi, oppure associando ai sistemi particolari grafi di influenza.

11.1.2 Rappresentazioni booleane e grafi di influenza

Un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ è un insieme comprendente due elementi particolari $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ e sul quale sono definite

[1] Nomenclatura e simbologia non sono uniformi in letteratura: talvolta matrici e vettori "strettamente positivi" sono classificati invece come "positivi" e la notazione "$\gg$" di questi Appunti è sostituita da "$>$".

- due *operazioni binarie*, di somma e prodotto[2], entrambe commutative e associative, per le quali valgono, per ogni $a, b, c \in \mathcal{B}$, le *proprietà di assorbimento*

$$a + (a \cdot b) = a, \quad a \cdot (a + b) = a \tag{11.2}$$

e le *proprietà distributive* (della somma rispetto al prodotto e del prodotto rispetto alla somma)

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \tag{11.3}$$

- un' *operazione unaria* di negazione (o complementazione), che indicheremo barrando l'elemento su cui opera e che soddisfa, per ogni $a \in \mathcal{B}$, le condizioni

$$a + \bar{a} = \mathbf{1}, \quad a \cdot \bar{a} = \mathbf{0} \tag{11.4}$$

Gli esempi di algebra di Boole che rivestono interesse per questo capitolo sono:

Esempio 11.1.1 [Algebra a due elementi $\mathcal{B}_2$] Sull'insieme $\{0, 1\}$ si definiscono le operazioni
- di addizione: $0 + 0 = 0$; $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$:
- di moltiplicazione: $0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$:
- di complementazione: $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$.
Esse soddisfano banalmente le proprietà di assorbimento, distributive e le (11.4).

Esempio 11.1.2 [Vettori booleani] L'insieme $\mathcal{B}_2^n$ delle colonne "booleane" a n componenti e a valori in $\mathcal{B}_2$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \ \xi_i \in \mathcal{B}_2 \right\}$$

con le operazioni di somma, di prodotto e di complementazione definite per componenti

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1\eta_1 \\ \xi_2\eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n\eta_n \end{bmatrix}, \quad \overline{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_n \end{bmatrix}$$

costituisce un'algebra di Boole. Quali sono gli elementi $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$?

- Esercizio 11.1.1 [Insieme delle parti di un insieme] Dato un insieme non vuoto S, l'insieme $P(S)$ delle parti di S, ovvero l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di S, è un'algebra di Boole rispetto alle operazioni di unione insiemistica (= somma), intersezione insiemistica (= prodotto) e complementazione ad S. Gli elementi $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ si identificano rispettivamente con l'insieme vuoto $\emptyset$ e con l'insieme S.

In un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ si introduce la relazione binaria $\leq$ ponendo $a \leq b \Leftrightarrow a = ab$ Essa è riflessiva, transitiva (infatti $a = ab$ e $b = bc$ implicano $a = a(bc) = (ab)c = ac$) e antisimmetrica (se $a = ab$ e $b = ab$, allora $a = b$), quindi è una relazione d'ordine parziale. L'elemento $\mathbf{0}$ è il minimo di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$, nel senso che $\mathbf{0} \leq a$, $\forall a \in \mathcal{B}$, mentre l'elemento $\mathbf{1}$ è il massimo.

[2] Il prodotto è denotato con "$\cdot$" o, più semplicemente, giustapponendo i fattori; in altri contesti, e in particolare quando si considera l'algebra dei sottoinsiemi di un insieme, l'operazione di somma si denota con "$\cup$" e quella di prodotto con "$\cap$".

- Esercizio 11.1.2 Si dimostri che $a \leq b \Leftrightarrow b = a + b$.
  $\sharp$ *Suggerimento:* $a = ab \Leftrightarrow b = b + ab = b + a$; $b = a + b \Leftrightarrow a = a(a + b) = ab$
- Esercizio 11.1.3 (i) In $\mathcal{B}_2^n$ risulta
$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$
  se e solo se $\eta_i = 0 \Rightarrow \xi_i = 0, \forall i$, ovvero se la presenza di una componente nulla nel secondo vettore implica che la medesima componente sia nulla anche nel primo.
  (ii) Sia $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_2^n$ un vettore non nullo. La diseguaglianza $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ oppure $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se e solo se il vettore $\mathbf{a}$ ha una sola componente unitaria.

Introduciamo una mappa $\natural$ dai reali non negativi $\mathbb{R}_+$ nell'algebra di Boole a due elementi

$$\natural : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}_2 : r \mapsto r^\natural = \begin{cases} 0 & \text{se } r = 0 \\ 1 & \text{se } r > 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

Notiamo che, se $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, allora $r_1^\natural + r_2^\natural = (r_1 + r_2)^\natural$ e $r_1^\natural \cdot r_2^\natural = (r_1 r_2)^\natural$. Ciò significa che si ottiene il medesimo elemento booleano eseguendo prima le operazioni di somma e prodotto fra reali non negativi e applicando poi la mappa $\natural$ al numero reale così ottenuto, oppure trasformando prima gli operandi con la mappa $\natural$, ed eseguendo poi sui trasformati le corrispondenti operazioni booleane.
La mappa $\natural$ si estende alle matrici non negative, associando alla matrice non negativa $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ la *matrice booleana* $M^\natural \in \mathcal{B}_2^{p \times m}$, nella quale l'elemento in posizione (i, j) è $m_{ij}^\natural$. È facile verificare che, se sostituiamo ai vettori di ingresso, stato e uscita $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ e alle matrici F, G, H, D i corrispondenti vettori booleani $\mathbf{u}^\natural(t)$, $\mathbf{x}^\natural(t)$, $\mathbf{y}^\natural(t)$ e le matrici booleane $F^\natural, G^\natural, H^\natural, D^\natural$, il sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\natural(t+1) &= F^\natural \mathbf{x}^\natural(t) + G^\natural \mathbf{u}^\natural(t) \\ \mathbf{y}^\natural(t) &= H^\natural \mathbf{x}^\natural(t) + D^\natural \mathbf{u}^\natural(t) \end{aligned} \tag{11.6}$$

inizializzato da $\mathbf{x}^\natural(0)$ fornisce ad ogni istante l'immagine "booleana" delle grandezze descritte dal sistema positivo (11.1), inizializzato da $\mathbf{x}(0)$.
La corrispondenza $\natural$ che associa al sistema positivo $\Sigma = (F, G, H, D)$ il sistema booleano $\Sigma^\natural = (F^\natural, G^\natural, H^\natural, D^\natural)$ non è iniettiva, poiché esistono infiniti sistemi positivi che danno luogo al medesimo sistema booleano. Ciononostante, alcune proprietà di (11.1) possono essere investigate direttamente su (11.6), poiché dipendono soltanto dalla presenza o assenza di elementi positivi nelle matrici e nei vettori coinvolti nella dinamica, ma non dai loro particolari valori[3].

Esempio 11.1.3 Le matrici positive

$$F_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

hanno la medesima immagine booleana, ma la prima descrive un sistema instabile, la seconda uno asintoticamente stabile.

[3] e quindi sono proprietà invarianti rispetto alla relazione di equivalenza fra sistemi positivi $(F, G, H, D) \sim (\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{D}) \Leftrightarrow (F^\natural, G^\natural, H^\natural, D^\natural) = (\bar{F}^\natural, \bar{G}^\natural, \bar{H}^\natural, \bar{D}^\natural)$.

Esempio 11.1.4 La proprietà che fra gli stati raggiungibili da $\mathbf{0}$ in t passi ci sia un vettore strettamente positivo dipende soltanto dalla coppia $(F^\natural, G^\natural)$, e non dalla particolare coppia non negativa (F, G) che ha per immagine $(F^\natural, G^\natural)$. Infatti, se per effetto di un ingresso non negativo $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots . \mathbf{u}(t-1)$ si ottiene

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\sigma=0}^{t-1} F^{t-\sigma-1} G\mathbf{u}(\sigma) \gg \mathbf{0},$$

al tempo t si ottiene uno stato strettamente positivo sostituendo a F e G due qualsiasi matrici non negative aventi la medesima immagine booleana di F e G .

- Esercizio 11.1.4 Se $F, \bar{F}$ sono matrici non negative $n \times n$ e $\mathbf{x}(0), \bar{\mathbf{x}}(0)$ sono vettori di $\mathbb{R}^n_+$, in evoluzione libera
(i) se $F \geq \bar{F}$ e $\mathbf{x}(0) \geq \bar{\mathbf{x}}(0)$ allora $\mathbf{x}(t) \geq \bar{\mathbf{x}}(t), \ \forall t \geq 0$;
(ii) se $F^\natural \geq \bar{F}^\natural$ e $\mathbf{x}^\natural(0) \geq \bar{\mathbf{x}}^\natural(0)$, non è in genere vero che $\mathbf{x}(t) \geq \bar{\mathbf{x}}(t), \ \forall t \geq 0$.

Le proprietà di un sistema positivo $\Sigma = (F, G, H)$ con m ingressi, n variabili di stato e p uscite che possono essere studiate mediante il sistema booleano $\Sigma^\natural = (F^\natural, G^\natural, H^\natural)$, possono esserlo anche ricorrendo a un *grafo di influenza* orientato, costituito da $m + n + p$ vertici, indiciati nelle variabili u_i, x_j e y_k.
Esso avrà

- un arco con origine nel vertice u_i e termine nel vertice x_j se $g_{ji} \neq 0$;

- un arco con origine nel vertice x_j e termine nel vertice x_h se $f_{hj} \neq 0$;

- un arco con origine nel vertice x_h e termine nel vertice y_k se $h_{kh} \neq 0$.

L'informazione circa il sistema Σ fornita dal grafo di influenza è la stessa che forniscono le matrici booleane $F^\natural, G^\natural, H^\natural$: la presenza di

- un arco da u_i a x_j equivale a $g_{ji} \neq 0$ in G, quindi a $g^\natural_{ji} = 1$ in $G^\natural$;

- un arco da x_j a x_h equivale a $f_{hj} \neq 0$ in F, quindi a $f^\natural_{hj} = 1$ in $F^\natural$;

- un arco da x_h a y_k equivale a $h_{kh} \neq 0$ in H, quindi a $h^\natural_{kh} = 1$ in $H^\natural$.

Esempio 11.1.5 Al sistema autonomo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad (11.7)$$

rimangono associati la matrice booleana

$$F^\natural = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (11.8)$$

e il grafo orientato riportato in figura 11.1.1.

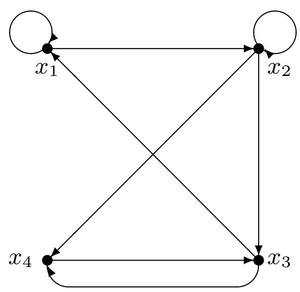

Figura 11.1.1

Esempio 11.1.6 Al sistema positivo con due ingressi u_1 e u_2, tre variabili di stato x_1, x_2 e x_3 e un'unica uscita y, con matrici

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad H = [\,0 \quad 5 \quad 0\,], \tag{11.9}$$

corrisponde il sistema booleano

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\,0 \quad 1 \quad 0\,], \tag{11.10}$$

e il grafo di influenza di figura 11.1.2.

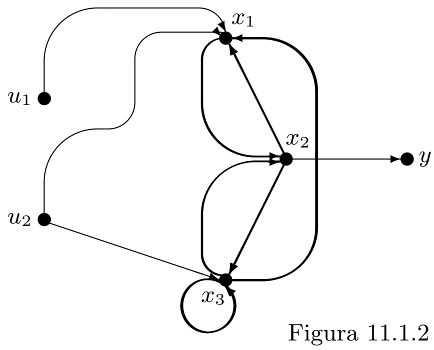

Figura 11.1.2

Sul grafo di influenza si possono leggere alcuni caratteri del comportamento dinamico del sistema:

- la presenza di un arco dal vertice u_i al nodo x_j corrisponde al fatto che, se la componente $u_i(t)$ dell'ingresso è positiva, nell'istante successivo la componente $x_j(t+1)$ dello stato è positiva;
- la presenza di un arco dal vertice x_j al nodo y_k corrisponde al fatto che, se la componente $x_j(t)$ dello stato è positiva, nel medesimo istante la componente $y_k(t)$ dell'uscita è positiva.
- la componente $x_j(t+1)$ è positiva se e solo se x_j è vertice terminale di un arco con origine in qualche vertice u_i e l'ingresso $u_i(t)$ è positivo, oppure x_j è vertice terminale di almeno un arco con origine in qualche vertice x_i e la componente $x_i(t)$ è positiva.

Un *cammino* di lunghezza h in un grafo orientato è una successione di h archi del grafo, tale che il vertice terminale dell'arco i-esimo è vertice iniziale dell'arco $(i+1)$-esimo. Un cammino con origine nel vertice s e termine nel vertice r si può individuare assegnando la successione dei suoi vertici $s \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{h-1} \to r$.
In particolare, se vertice iniziale e vertice finale coincidono (i.e. $s = r$), il cammino è un *ciclo*, e un ciclo di lunghezza h è un *circuito* se h vertici sono distinti. In un grafo con n vertici non ci possono essere circuiti di lunghezza maggiore di n e ogni cammino di lunghezza n o maggiore comprende almeno un circuito.
Alla presenza di un elemento positivo nella posizione (r,s), $\;r,s \in \{1,2,\ldots,n\}$ della potenza F^h della matrice $F = [f_{ij}]$ corrisponde l'esistenza di cammini di lunghezza h con origine nel vertice x_s e termine nel vertice x_r del grafo. Infatti, il generico addendo $f_{r,i_1} f_{i_1,i_2} \ldots f_{i_{h-1},s}$ della somma che fornisce l'elemento di indici r,s in F^h

$$[F^h]_{r,s} = \sum_{i_1,i_2,\ldots i_{h-1}} f_{r,i_1} f_{i_1,i_2} \ldots f_{i_{h-1},s}$$

è positivo se e solo se sono positivi tutti i suoi fattori. Ciò equivale all'esistenza di un arco dal vertice x_s al vertice $x_{i_{h-1}}$, un arco dal vertice $x_{i_{h-1}}$ al vertice $x_{i_{h-2}}$, …, un arco dal vertice x_{i_1} al vertice x_r, ovvero di un cammino

$$x_s \to x_{i_{h-1}} \to x_{i_{h-2}} \to \ldots \to x_{i_1} \to x_r$$

da x_s ad x_r, passante per i vertici $x_{i_{h-1}}, x_{i_{h-2}}, \ldots, x_{i_1}$.
Quindi $[F^h]_{r,s}$ è positivo se e solo se nel grafo di F esiste almeno un cammino di lunghezza h che connette x_s a x_r. Il grafo di F si dice *fortemente connesso* se, comunque si scelgano i vertici x_s e x_r, esiste un cammino con inizio in x_s e termine in x_r.

11.2 Matrici quadrate non negative: proprietà combinatorie

Le proprietà dei sistemi positivi che dipendono dal fatto che taluni elementi delle matrici siano nulli e altri no, ma non dai loro particolari valori numerici reali, sono dette *combinatorie.* Perciò esse possono essere riferite indifferentemente alle matrici reali F, G, H, alle corrispondenti matrici booleane $F^\natural, G^\natural, H^\natural$, o alla struttura del grafo di influenza.

11.2.1 Matrici di permutazione e matrici monomie

Se F è una matrice in $\mathbb{R}_+^{n\times n}$, il ricorso a trasformazioni di similarità non conserva in generale il suo carattere non negativo, come del resto un cambiamento di base nello spazio $\mathbb{R}^n$ indotto da una generica matrice invertibile non garantisce che le componenti di un vettore conservino il segno passando dalla vecchia base alla nuova. Inoltre, per i sistemi positivi è importante conservare non solo il carattere non negativo delle grandezze in gioco ma anche il significato delle componenti dei vettori (a meno di cambiamenti di scala e/o permutazioni delle componenti stesse) e, conseguentemente, la presenza o l'assenza di interazione fra le variabili. La classe delle trasformazioni che possono applicarsi a F per indagarne la struttura è perciò molto meno generale del gruppo di similarità e si riduce essenzialmente alla classe delle *trasformazioni di cogredienza*, indotte dalle matrici di permutazione[4], o a quella, un poco più estesa, delle similarità indotte da *matrici monomie.*

Alla permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$$

associamo la *matrice di permutazione*

$$\Pi_\sigma := [\,\mathbf{e}_{i_1} \quad \mathbf{e}_{i_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{i_n}\,].$$

Essa trasforma la base "vecchia" $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ nella base "nuova", ottenuta per permutazione della vecchia,

$$(\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\Pi_\sigma.$$

Il vettore rappresentato nella base vecchia dalla colonna $\mathbf{x} = [\,\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n\,]^T$ è rappresentato nella base "permutata" dalla colonna

$$\Pi_\sigma^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \Pi_\sigma^T\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_{i_1}^T\\ \mathbf{e}_{i_2}^T\\ \vdots\\ \mathbf{e}_{i_n}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi_{i_1}\\ \xi_{i_2}\\ \vdots\\ \xi_{i_n}\end{bmatrix}.$$

Analogamente, la trasformazione lineare rappresentata rispetto alla base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ dalla matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nella base permutata è rappresentata dalla matrice

$$\Pi_\sigma^T F \Pi_\sigma = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_{i_1}^T\\ \mathbf{e}_{i_2}^T\\ \vdots\\ \mathbf{e}_{i_n}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n}\\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n}\end{bmatrix}[\,\mathbf{e}_{i_1} \quad \mathbf{e}_{i_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{i_n}\,] = \begin{bmatrix} f_{i_1,i_1} & f_{i_1,i_2} & \cdots & f_{i_1,i_n}\\ f_{i_2,i_1} & f_{i_2,i_2} & \cdots & f_{i_2,i_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{i_n,i_1} & f_{i_n,1_2} & \cdots & f_{i_n,i_n}\end{bmatrix},$$

[4]Per ulteriori proprietà delle matrici di permutazione, si veda il par 14. dell'Appendice di Algebra Lineare

ottenuta applicando la medesima permutazione alle colonne e alle righe di F. Due matrici che differiscono per una similarità indotta da una matrice di permutazione (e quindi per la medesima permutazione operata sulle righe e sulle colonne) si dicono "cogredienti".
Ovviamente la cogredienza preserva le proprietà di non negatività delle matrici, nonché il numero e il valore delle componenti positive di righe o colonne che si corrispondono nella permutazione.

Le *matrici monomie* (dette anche matrici di permutazione generalizzate), si ottengono dalle matrici di permutazione moltiplicandole (a destra o a sinistra) per matrici diagonali positive non singolari. Una matrice monomia (che ha quindi per colonne e per righe vettori monomi) ha struttura del tipo[5]

$$M = \Delta\Pi = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ & & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11.11)$$

con d_i numeri reali positivi. Π e $\Delta\Pi$ hanno la medesima immagine booleana e il medesimo grafo di influenza. Si verifica direttamente che

- la matrice monomia $\Delta\Pi$ può essere espressa anche nella forma $\Pi(\Pi^T\Delta\Pi) = \Pi\bar{\Delta}$, dove la matrice diagonale $\bar{\Delta}$ appare come fattore destro;
- il prodotto di due matrici monomie è una matrice monomia, dato che

  $$(\Delta_1\Pi_1)(\Delta_2\Pi_2) = \Delta_1(\Pi_1\Delta_2)\Pi_2 = \Delta_1(\Pi_1\Delta_2\Pi_1^T)\Pi_1\Pi_2$$

  risulta essere prodotto della matrice diagonale $\Delta_1(\Pi_1\Delta_2\Pi_1^T)$ e della matrice di permutazione $\Pi_1\Pi_2$;
- la matrice monomia $\Delta\Pi$ ha un'inversa monomia, dato che $(\Pi^T\Delta^{-1})(\Delta\Pi) = I_n$.

Le similarità indotte da matrici monomie corrispondono a permutazioni dei vettori di base accompagnate da una moltiplicazione di ciascuno di essi per una costante positiva, quindi ad un riordino delle variabili di stato e ad un cambiamento delle unità di misura utilizzate per determinarne i valori.
Come si vedrà nel seguito, le matrici monomie giocano un ruolo rilevante nello studio delle proprietà strutturali (raggiungibilità etc.) dei sistemi positivi.

- Esercizio 11.2.1 Si dimostri che se una matrice positiva non singolare $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ ha un'inversa X positiva allora F è necessariamente monomia.

  ♯ *Suggerimento: Se $FX = I_n$ e se gli elementi f_{ih}, f_{ik} della riga i-esima fossero entrambi positivi, nella matrice X dovrebbe essere $x_{hj} = x_{kj} = 0, \forall j \neq i$, quindi le righe h-esima e k-esima di X risulterebbero proporzionali e X non sarebbe invertibile.*

[5] Per non appesantire la notazione, in (11.11) si fa riferimento a una specifica matrice di permutazione.

11.2.2 Classificazione delle matrici non negative

Definizione 11.2.1 [Matrici primitive, irriducibili, riducibili] *Una matrice F in $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ si dice*

- **primitiva** *se esiste un intero $h > 0$ per cui risulta $F^h \gg 0$, ovvero se*
$$[F^h]_{rs} > 0, \quad \forall r, s \in \{1, 2, \dots, n\};$$
il più piccolo esponente h in corrispondenza al quale si ha $F^h \gg 0$ è detto "esponente di primitività" di F;
- **irriducibile** *se in corrispondenza ad ogni $r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$ esiste un esponente h (che dipende in genere da r ed s) per cui risulta*
$$[F^h]_{rs} > 0;$$
- **riducibile** *se esistono r ed s tali che, per ogni $h > 0$, in F^h si abbia*
$$[F^h]_{rs} = 0, \quad \forall h \geq 0.$$

Le matrici quadrate strettamente positive sono primitive, le primitive sono irriducibili e l'insieme delle matrici riducibili complementa quello delle matrici irriducibili. D'altra parte
$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
sono primitiva ma non strettamente positiva la prima e irriducibile ma non primitiva la seconda.
Si osservi che una matrice quadrata F con una riga o una colonna nulla è sempre riducibile, poiché la riga o la colonna rimangono nulle in ogni potenza positiva della matrice.

- Esercizio 11.2.2 [Esponente di primitività] (i) L'esponente di primitività di una matrice primitiva $n \times n$ può essere maggiore di n: si consideri, ad esempio, la matrice
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(ii*) L'esponente di primitività non eccede $(n-1)^2 + 1$, ed esistono matrici primitive per le quali esso raggiunge tale valore (cfr. Brualdi, Ryser "Combinatorial Matrix Theory", Cambridge U.P.)
(iii) Se F è primitiva con esponente di primitività h, allora $F^{h+1} \gg 0$ e quindi, induttivamente, $F^{h+j} \gg 0$ per ogni $j \geq 0$.

  ♯ *Suggerimento per (iii): Ogni colonna di F è non nulla, altrimenti F^h conterrebbe una colonna nulla; inoltre $[F^{h+1}]_{rs}$ si ottiene moltiplicando la riga r-esima, strettamente positiva, di F^h per la colonna s-esima, positiva, di F.*

- Esercizio 11.2.3 [Elementi diagonali e primitività] Una matrice irriducibile F avente un elemento diagonale positivo è primitiva, ma esistono matrici primitive aventi diagonale nulla.

  ♯ *Suggerimento: Si supponga $[F]_{1,1} > 0$. Qualunque sia j, la definizione di irriducibilità implica che, per qualche $k > 0$ si abbia $[F^k]_{1,j} > 0$. Da $[F]_{1,1} > 0$ e $[F^k]_{1,j} > 0$ segue allora $[F^{k+1}]_{1,j} > 0$. Quindi, se R è abbastanza grande, F^R ha strettamente positiva la prima riga. In modo analogo si prova che, se C è abbastanza grande, F^C ha strettamente positiva la prima colonna e, posto $M = \max\{R, C\}$, F^M ha strettamente positive la prima riga e la prima colonna. Allora F^{2M} è strettamente positiva. Ma $F = [\, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \,]$ ha diagonale nulla ed è primitiva.*

- Esercizio 11.2.4 Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.
  (i) Se per qualche $h > 0$ una colonna di F^h è nulla, allora F è riducibile.
  (ii) Se F è irriducibile e per qualche $h > 0$ una colonna di F^h è strettamente positiva, F è primitiva.

  ♯ *Suggerimento (i): Se la colonna j-esima di F^h è nulla, è nulla la colonna j-esima in tutte le potenze successive di F. Se F fosse irriducibile, per qualche $k \geq 1$ risulterebbe $[F^k]_{jj} > 0$, quindi anche $[F^{\nu k}]_{jj} > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$. (ii) Se la colonna j-esima è strettamente positiva in F^h, lo è in tutte le potenze successive di F. Per ogni $i \neq j$, esiste $k > 0$ tale che $[F^k]_{ji} > 0$, quindi $F^{h+k} = F^h F^k$ ha strettamente positive la i-esima e la j-esima colonna. Iterando la procedura...*

La seguente proposizione riporta alcune importanti caratterizzazioni della irriducibilità.

Proposizione 11.2.2 [Condizioni di irriducibilità] *Una matrice $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ di dimensione $n \geq 2$ è irriducibile se e solo se vale una qualsiasi delle condizioni equivalenti sottoelencate:*

1) [Definizione 11.2.1] *per ogni coppia di indici (r, s) esiste un esponente $h > 0$ per cui risulta $[F^h]_{rs} > 0$;*

1') [Grafo di influenza] *il grafo di infuenza della matrice F è strettamente connesso;*

2) [Non triangolarizzabilità] *non esiste alcuna matrice di permutazione Π per cui si abbia*

$$\bar{F} = \Pi^T F \Pi = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & 0 \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{bmatrix}, \tag{11.12}$$

dove $\bar{F}_{11}$ e $\bar{F}_{22}$ sono sottomatrici quadrate non vuote;

3) [Azione di F sui vettori positivi] *se il vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$ ha k componenti positive, con $0 < k < n$, allora $(I_n + F)\mathbf{y}$ ha almeno $k + 1$ componenti positive;*

4) [Potenze di F e vettori strettamente positivi] $(I_n + F + \ldots + F^{n-1})\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$ *per ogni vettore positivo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$;*

4') qualunque sia $k \geq 0$, $(F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1})\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$ per ogni vettore positivo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$;

4") esiste $k \geq 0$ tale per cui $(F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1})\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$ per ogni vettore positivo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$;

5) [Potenze di F e matrici strettamente positive] *la matrice $(I + F + \ldots + F^{n-1})$ è strettamente positiva.*

5') per ogni scelta di $k \geq 0$, la matrice $F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1}$ è strettamente positiva;

5") esiste $k \geq 0$ tale per cui la matrice $F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1}$ è strettamente positiva;

Prova (1) $\Leftrightarrow$ (1') è immediata dalle definizioni.
(1) $\Rightarrow$ (2) Verifichiamo che la triangolarizzabilità, ovvero la negazione di (2), implica la negazione di (1). Se per qualche matrice Π_σ, associata a una permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix},$$

nella scomposizione a blocchi (11.12) fosse nullo il blocco $\bar{F}_{12}$, anche in $\bar{F}^k = \Pi_\sigma^T F^k \Pi_\sigma$, $\forall k > 0$, sarebbe nullo il blocco corrispondente ed esisterebbero interi r, s per i quali sono tutti nulli gli elementi in posizione (r, s) delle matrici $\Pi_\sigma^T F^k \Pi_\sigma$. Allora in tutte le matrici F^k sarebbero nulli gli elementi in posizione $(\sigma(r), \sigma(s))$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia Π una matrice di permutazione tale che le prime $n-k$ coordinate di $\mathbf{x} := \Pi\mathbf{y}$ siano nulle, e siano positive le ultime k, indicate collettivamente con il blocco colonna $\mathbf{x}_2 \gg \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x} = \Pi\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} n-k \\ k \end{array}.$$

Evidentemente il numero degli zeri in $(I_n + F)\mathbf{y} = \mathbf{y} + F\mathbf{y} \geq \mathbf{y}$ non può essere più grande del numero $n-k$ degli zeri di $\mathbf{y}$.
D'altra parte, se il numero degli zeri in $(I_n + F)\mathbf{y}$ fosse eguale a $n-k$, per ogni i avremmo che l'annullarsi di una coordinata di $\mathbf{y}$ implica l'annullarsi della medesima coordinata di $F\mathbf{y}$. Di conseguenza, $0 = (\Pi\mathbf{y})_i = x_i$ implicherebbe $0 = (\Pi F\mathbf{y})_i = (\Pi F \Pi^T \mathbf{x})_i$.
Perciò, se nel vettore $\mathbf{x}$ sono nulle tutte e sole la componenti di indice $i = 1, 2, \ldots, n-k$, nel vettore $\Pi F \Pi^T \mathbf{x}$ sono nulle le componenti di indice $i = 1, 2, \ldots, n-k$ e, ponendo $\bar{F} := \Pi F \Pi^T$, ciò si traduce nella condizione

$$\bar{F} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \star \end{bmatrix} \begin{array}{c} n-k \\ k \end{array}. \tag{11.13}$$

Poiché $\mathbf{x}_2$ è strettamente positivo, (11.13) implica $\bar{F}_{12} = 0$ e la riducibilità di F.

(3) $\Rightarrow$ (4) Proviamo che, se $(I_n + F + \ldots + F^h)\mathbf{y}$ ha k componenti positive e $k < n$, allora $(I_n + F + \ldots + F^{h+1})\mathbf{y}$ ne ha $\bar{k} \geq k+1$. Per il punto 3, ciò è vero se $h = 0$. Procediamo allora per induzione rispetto ad h. Il vettore $(I_n + F + \ldots + F^{h+1} + F^{h+2})\mathbf{y}$ ha gli stessi zeri di

$$(I_n + 2F + \ldots + 2F^{h+1} + F^{h+2})\mathbf{y} = (I_n + F)[(I_n + F + \ldots + F^{h+1})\mathbf{y}], \tag{11.14}$$

quindi, se $\bar{k} < n$, esso ha almeno una componente positiva in più di $(I_n + F + \ldots + F^{h+1})\mathbf{y}$.
È ora evidente che $(I_n + F + \ldots + F^{n-2} + F^{n-1})\mathbf{y}$ è strettamente positivo.

(4) $\Rightarrow$ (4') Per ogni $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, se vale la (4) vale anche $F\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Altrimenti, se fosse $F\mathbf{y} = \mathbf{0}$, da $\mathbf{y} + F\mathbf{y} + \ldots + F^{n-1}\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$ seguirebbe $\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$, quindi sarebbe nulla la matrice F, e ciò è incompatibile con (4).
Procedendo per induzione, per ogni $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ e per ogni $k > 0$ il vettore $F^k\mathbf{y} = F(F^{k-1}\mathbf{y})$ è positivo, quindi è strettamente positivo il vettore $(I_n + F + \ldots + F^{n-1})F^k\mathbf{y} = (F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1})\mathbf{y}$.

(4') $\Rightarrow$ (4") Ovvio.

(4") $\Rightarrow$ (5") Per $i = 1, 2, \ldots, n$, scegliendo in (4") $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$ si verifica che la i-esima colonna di $F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1}$ è strettamente positiva.

(5") $\Rightarrow$ (5) Se un elemento $[I_n + F + \ldots + F^{n-1}]_{r,s}$ fosse nullo, sarebbero nulli $[I]_{r,s}$, $[F]_{r,s}$, $\ldots$, $[F^{n-1}]_{r,s}$. Per il teorema di Cayley Hamilton, ciascuna delle matrici $F^n, F^{n+1}, \ldots$ può essere espressa come combinazione lineare di $I, F, \ldots, F^{n-1}$, quindi l'elemento di indici r, s in ciascuna di esse sarebbe nullo, perché ottenuto combinando $[I]_{r,s}, [F]_{r,s}, \ldots, [F^{n-1}]_{r,s}$, che sono tutti nulli, e $F^k + F^{k+1} + \ldots + F^{k+n-1}$ non sarebbe strettamente positiva.

(5) $\Rightarrow$ (5') Se $I_n + F + \ldots + F^{n-1} \gg 0$, la matrice F non ha colonne nulle. Quindi risulta $(I_n + F + \ldots + F^{n-1})F \gg 0$ e, induttivamente, $(I_n + F + \ldots + F^{n-1})F^k \gg 0$, $\forall k \geq 0$.

(5') $\Rightarrow$ (1) Nella (5') si scelga $k = 1$, ovvero $(F + F^2 + \ldots + F^n) \gg \mathbf{0}$. Allora, per ogni scelta di r e di s, una almeno delle matrici $F, F^2, \ldots, F^n$ ha positivo l'elemento in posizione (r, s), ossia $[F^h]_{r,s}$ risulta positivo per qualche h compreso fra 1 e n. ■

- Esercizio 11.2.5 Se F è una matrice non negativa $n \times n$ e $[F^h]_{rs} = 0$ per $h = 0, 1, \dots, n-1$, allora $[F^h]_{rs} = 0$ per ogni h. Quindi F è riducibile.

  ♯ *Suggerimento: La colonna s-esima della matrice $I + F + \dots + F^{n-1}$ non è strettamente positiva.*

- Esercizio 11.2.6 Sia F una matrice non negativa $n \times n$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_+$ un vettore positivo.
  (i) Se i vettori $F^h\mathbf{v}$, $h = 1, 2, \dots n$, hanno nulla la prima componente, ossia $(F\mathbf{v})_1 = (F^2\mathbf{v})_1 = \dots = (F^n\mathbf{v})_1 = 0$, allora F è riducibile.
  (ii) Se il vettore $\mathbf{w} = F\mathbf{v} + F^2\mathbf{v} + \dots + F^n\mathbf{v}$ ha nulle le componenti in posizione $i_1, i_2, \dots, i_r$ e positive le altre, allora in F è nulla la sottomatrice avente $i_1, i_2, \dots, i_r$ per indici di riga e gli altri elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ per indici di colonna.

  ♯ *Suggerimento: (i) la riducibilità segue dal punto (4') della proposizione 11.2.2, scegliendovi $k = 1$. (ii) il vettore $F\mathbf{w}$, combinazione a coefficienti positivi di tutte le colonne di F con indice diverso da $i_1, i_2, \dots, i_r$, ha nulle tutte le componenti in posizione $i_1, i_2, \dots, i_r$. Quindi le colonne suddette di F hanno componenti nulle nelle posizioni $i_1, i_2, \dots, i_r$.*

- Esercizio 11.2.7 Se $F \in \mathbb{R}^{n\times n}_+, n \geq 2$ è irriducibile, (i) F può avere qualche autovalore nullo? (*Sugg.: si consideri* $F = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$) F può essere nilpotente ? (*Sugg.: si consideri il punto (5') della prop. 11.2.2*) $F - \mathrm{diag}F$ può essere riducibile? (*Sugg.: si consideri il punto (2) della prop. 11.2.2*)

Anche la primitività, come l'irriducibilità, è riconducibile a alla struttura del grafo di F. Per verificarlo, supponiamo che F sia una matrice $n \times n$ irriducibile, avente quindi un grafo di influenza fortemente connesso. Se scegliamo nel grafo un vertice x_i e consideriamo le lunghezze dei cicli passanti per x_i , l'insieme $\mathcal{N}_i$ di tali lunghezze è additivamente chiuso. Infatti, se gli interi ν_1 e ν_2 appartengono a $\mathcal{N}_i$ perché sono lunghezze di due cicli γ_1 e γ_2 passanti per x_i, il ciclo ottenuto percorrendo, a partire da x_i, prima γ_1 e poi γ_2 ha lunghezza $\nu_1 + \nu_2$, quindi $\nu_1 + \nu_2 \in \mathcal{N}_i$. Per studiare gli insiemi $\mathcal{N}_i$, tornerà utile premettere alcune proprietà dei numeri interi.
Se $a \neq 0$, con la notazione $a|b$ ("a divide b", o "a è divisore di b") si intende che esiste un numero x per cui $b = ax$. Il massimo comun divisore (MCD) di un insieme non vuoto $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ è un divisore d di tutti gli elementi di $\mathcal{N}$, dotato della ulteriore proprietà che ogni altro divisore comune d' di $\mathcal{N}$ divide d, ossia soddisfa la condizione $d'|d$.

- Esercizio 11.2.8 Se d è il MCD degli elementi di un insieme infinito $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$, è anche MCD degli elementi di qualche sottoinsieme finito di $\mathcal{N}$.

Il lemma seguente, attribuito a Schur, stabilisce che ogni sottoinsieme non vuoto e additivamente chiuso di $\mathbb{N}$ contiene "quasi tutti" i multipli del suo MCD.

Lemma 11.2.3 [Schur] *Sia $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ un insieme di interi positivi, non vuoto e chiuso additivamente, e sia d il massimo comun divisore degli elementi di $\mathcal{N}$. Allora esiste un intero $K > 0$ tale che $kd \in \mathcal{N}$ per ogni $k \geq K$.*

Prova Supponiamo dapprima $d = 1$. Se $1 \in \mathcal{N}$, il risultato è ovvio e $\mathcal{N} = \mathbb{N}$. Altrimenti esiste un sottoinsieme $\{n_1, n_2, \dots, n_f\}$ di $\mathcal{N}$, finito e di cardinalità minima, tale da aversi

$$1 = \mathrm{MCD}\{n_1, n_2, \dots, n_f\}. \tag{11.15}$$

La (11.15) equivale all'esistenza di f combinatori interi $c_1, c_2, \dots c_f$, parte positivi e parte negativi, soddisfacenti $c_1n_1 + c_2n_2 + \dots + c_fn_f = 1$, ovvero, supponendo[6] positivi $c_1, c_2, \dots c_h$, $h < f$, e negativi gli altri combinatori,

$$(c_1n_1 + c_2n_2 + \dots + c_hn_h) - (-c_{h+1}n_{h+1} - c_{h+2}n_{h+2} + \dots - c_fn_f) = a - b = 1$$

[6]Basta, eventualmente, permutare gli elementi della combinazione.

Poiché $\mathcal{N}$ è additivamente chiuso, a e b appartengono a $\mathcal{N}$. Ponendo $K = b(b-1)$, ogni intero $k \geq K$ soddisfa $k = qb + r$ con $0 \leq r \leq b-1$ e $q \geq b-1$, quindi

$$k = (q-r)b + rb + r = (q-r)b + r(b+1) = (q-r)b + ra \tag{11.16}$$

appartiene a $\mathcal{N}$, in quanto somma di elementi di $\mathcal{N}$.
Supponiamo ora $d > 1$. Gli elementi di $\mathcal{N}$ sono divisibili per d, quindi l'insieme $\mathcal{N}' := \{\frac{n}{d}, n \in \mathcal{N}\}$ è costituito da interi positivi che hanno 1 come MCD, ed è additivamente chiuso. Poiché esiste $K > 0$ per cui $k \geq K$ implica $k \in \mathcal{N}'$, gli interi kd appartengono a $\mathcal{N}$ per ogni $k \geq K$. ■

Lemma 11.2.4 [Cicli e circuiti in un grafo orientato fortemente connesso]
Sia $\mathcal{G}$ un grafo orientato e fortemente connesso, di vertici $x_1, x_2, \ldots x_n$.
Se $\mathfrak{z}$ è il MCD delle lunghezze di tutti i **cicli** *di $\mathcal{G}$ e $\mathfrak{z}_i$ è il MCD delle lunghezze dei* **cicli** *passanti per il vertice x_i, allora*

i) $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_i$;

ii) esiste $K > 0$ tale per cui, se $k \geq K$, per ogni vertice x_i di $\mathcal{G}$ passa qualche **ciclo** *di lunghezza $k\mathfrak{z}$;*

iii) $\mathfrak{z}$ è il MCD delle lunghezze dei **circuiti** *di $\mathcal{G}$.*

Prova (i) Basterà verificare i punti seguenti:

- $\mathfrak{z} | \mathfrak{z}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$ (11.17)

Infatti i cicli per x_i sono un sottoinsieme dell'insieme di tutti i cicli di $\mathcal{G}$. Allora $\mathfrak{z}$, divisore comune delle lunghezze di tutti i cicli, è un divisore comune delle lunghezze dei cicli per x_i, quindi un divisore del MCD $\mathfrak{z}_i$ delle lunghezze dei cicli per x_i.

- $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = \ldots = \mathfrak{z}_n := d$ (11.18)

Consideriamo due vertici $x_j \neq x_i$. L'ipotesi di connessione implica l'esistenza di un cammino orientato π da x_i a x_j, di lunghezza p, e di un cammino orientato π' da x_j a x_i, di lunghezza p'. Se γ_i è un arbitrario ciclo per x_i, di lunghezza ν, $\mathfrak{z}_j$ divide sia $p + \nu + p'$, sia $p + p'$, quindi $\mathfrak{z}_j \,|\, \nu$. Ma allora, per l'arbitrarietà del ciclo γ_i, $\mathfrak{z}_j$ è un divisore comune delle lunghezze di tutti i cicli per x_i, quindi divide il MCD di tali lunghezze, ovvero $\mathfrak{z}_j \,|\, \mathfrak{z}_i$. Scambiando i ruoli di x_i e di x_j, si conclude che $\mathfrak{z}_i \,|\, \mathfrak{z}_j$. Quindi $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_j$, $\forall i, j$ e si può porre $d = \mathfrak{z}_1 = \ldots = \mathfrak{z}_n$.

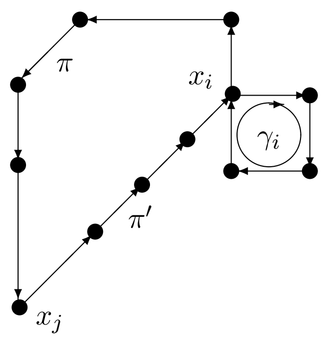

Figura 11.2.1

- $d | \mathfrak{z}$ (11.19)

Ogni ciclo γ di $\mathcal{G}$ passa per almeno un vertice x_j, quindi la sua lunghezza ν soddisfa $\mathfrak{z}_j \,|\, \nu$, quindi $d \,|\, \nu$. Allora d, essendo un divisore comune delle lunghezze di tutti i cicli del grafo, divide il MCD $\mathfrak{z}$ di tali lunghezze.
Da (11.17-11.19) si conclude che $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_i = d$.

(ii) L'insieme $\mathcal{N}_i$ delle lunghezze dei cicli per x_i è additivamente chiuso, quindi per il lemma di Schur esiste un intero $K_i > 0$ tale che, per ogni $k \geq K_i$, $k\mathfrak{z}_i = k\mathfrak{z}$ è lunghezza di qualche ciclo per x_i. Basta allora scegliere $K = \max_{i=1,\dots n} K_i$ per concludere che, se $k \geq K$, per ogni vertice x_i passa qualche ciclo di lunghezza $k\mathfrak{z}_i = k\mathfrak{z}$.

(iii) Sia $\mathfrak{c}$ il MCD delle lunghezze dei circuiti di $\mathcal{G}$. Poiché ogni circuito è un ciclo, $\mathfrak{z} \mid \mathfrak{c}$. D'altra parte, ogni ciclo γ può essere decomposto (come?!) in un numero finito f di circuiti elementari e la sua lunghezza ν è somma delle lunghezze $c_1, c_2, \dots, c_f$ dei circuiti componenti. Da $\mathfrak{c} \mid c_i,\ i = 1, 2, \dots t$ segue $\mathfrak{c} \mid \nu$, quindi $\mathfrak{c}$ è un divisore comune delle lunghezze di tutti i cicli del grafo e $\mathfrak{c} \mid \mathfrak{z}$. Allora $\mathfrak{c} = \mathfrak{z}$. ■

Proposizione 11.2.5 [Primitività e cicli del grafo di influenza] *Una matrice positiva F è primitiva se e solo se il suo grafo di influenza è fortemente connesso e il MCD $\mathfrak{z}$ delle lunghezze dei suoi circuiti è 1.*

Prova Supponiamo dapprima che il grafo sia fortemente connesso (i.e. F sia irriducibile) e che sia $\mathfrak{z} = 1$. Come conseguenza del punto (ii) del lemma 11.2.4, esiste $K > 0$ tale che, se $k \geq K$, per ogni vertice x_i passa qualche ciclo di lunghezza k. D'altra parte, per l'ipotesi di connessione, comunque si scelgano x_i e x_j esiste un cammino π che va da x_i a x_j. Se p ne è la lunghezza, concatenando π con un ciclo per x_j possiamo concludere che esistono cammini da x_i a x_j di lunghezza $p + k$, per ogni $k \geq K$. Quindi nella matrice F^{p+k} l'elemento $[F^{p+k}]_{ji}$ è positivo per ogni $k \geq K$. Il ragionamento, ripetuto per ogni coppia di vertici, porta a concludere che le potenze della matrice F sono strettamente positive quando l'esponente è abbastanza elevato.
Viceversa, supponiamo F primitiva (e, perciò, irriducibile). Per h abbastanza grande, F^h e F^{h+1} sono strettamente positive, quindi gli elementi diagonali soddisfano $[F^h]_{ii} > 0$ e $[F^{h+1}]_{ii} > 0$. Poiché nel grafo di influenza di F passano per ciascun vertice x_i sia cicli di lunghezza h che di lunghezza $h + 1$, il MCD delle lunghezze dei cicli per x_i, e quindi di tutti i cicli, vale 1. ■

Il ricorso a trasformazioni di cogredienza consente di approfondire lo studio delle matrici riducibili e di quelle irriducibili, chiarendo il carattere della loro azione sui vettori di $\mathbb{R}^n_+$. La *forma normale* delle matrici riducibili discende da considerazioni di carattere combinatorio e verrà discussa immediatamente, mentre la *forma ciclica di Frobenius* delle matrici irriducibili sarà discussa in un paragrafo successivo, basandosi su risultati che esporremo più avanti.

Proposizione 11.2.6 [Forma normale di una matrice riducibile] *Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ una matrice non negativa riducibile di dimensione $n > 1$. Esiste allora una matrice di permutazione Π che per cogredienza porta la matrice F nella seguente "forma normale"*

$$\bar{F} = \Pi^T F T = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \bar{F}_{1,1} & & & & & & \\ 0 & \bar{F}_{2,2} & & & & O & \\ 0 & \cdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{F}_{h,h} & & & \\ \hline \star & \star & \cdots & \star & \bar{F}_{h+1,h+1} & & \\ \star & \star & \cdots & \star & \star & \ddots & \\ \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \bar{F}_{k,k} \end{array}\right] \tag{11.20}$$

in cui ciascun blocco diagonale $\bar{F}_{i,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k > 1$, *è una matrice irriducibile, o la matrice nulla di dimensione 1 per 1. Inoltre, se risulta* $h < k$, *in ciascuna riga a blocchi successiva alla* h*-esima uno almeno dei blocchi fuori diagonale e indicati con* $\star$ *è una matrice positiva*[7]*. I blocchi* $\bar{F}_{i,i}$, $i = 1, 2, \ldots, h$, *sono detti "blocchi isolati".*

PROVA Poichè F è riducibile, per la proposizione precedente esiste una matrice di permutazione Π_1 che per cogredienza la riduce alla forma (11.12)

$$\Pi_1^T F \Pi_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \star & C \end{bmatrix}.$$

Se uno dei blocchi diagonali, p.es. il blocco C, ha dimensione maggiore di 1 ed è riducibile, esiste un'ulteriore matrice Π_2 che permuta i vettori di base che interessano il blocco C, riducendo quest'ultimo per cogredienza a forma triangolare

$$(\Pi_2^T \Pi_1^T) F (\Pi_1 \Pi_2) \;=\; \Pi_2^T \begin{bmatrix} A & | & 0 \\ - & - & - \\ \star & | & C \end{bmatrix} \Pi_2 \;=\; \begin{bmatrix} A & | & 0 & 0 & \\ - & - & - & - & - \\ \star & | & D & 0 & \\ \star & | & \star & E & \end{bmatrix},$$

e così via... Il procedimento di riduzione ha termine quando tutti i blocchi diagonali sono irriducibili o sono matrici nulle di dimensione 1×1.
Supponiamo infine che

- siano nulli tutti i blocchi in posizione (i, j), con $i < T$ e $j < i$;
- il blocco in posizione (T, T) abbia alla sua sinistra alcuni blocchi non nulli, ovvero esistono alcuni blocchi non nulli in posizione (T, j) con $j < T$;
- esista un ulteriore blocco in posizione $(T + \nu, T + \nu)$, $\nu \geq 1$ alla cui sinistra , ovvero nelle posizioni $(T + \nu, j)$, $j < T + \nu$, i blocchi sono tutti nulli:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1,1} & & & & & & & \\ 0 & \bar{F}_{2,2} & & & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & \\ \star & \star & \ldots & \bar{F}_{T,T} & & & & \\ \star & \star & \cdots & \star & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{F}_{T+\nu,T+\nu} & & \\ \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \ddots & \\ \star & \star & \ldots & \star & \star & \star & \ldots & \bar{F}_{k,k} \end{bmatrix}$$

Permutando righe e colonne del blocco T-esimo con quelle del blocco $(T + \nu)$-esimo, si ottiene che tutti i blocchi in posizione (i, j), con $i \leq T$ e $j < i$, diventino nulli. Il procedimento può essere iterato un numero finito di volte, fino all'ottenimento della forma normale (11.20). ■

[7] e quindi non nulla.

Esempio 11.2.1 [MODELLO STATICO DI LEONTIEF E IRRIDUCIBILITÀ] La versione statica del modello di Leontief ipotizza un sistema economico, *disaggregato in n settori* $S_1, S_2, \dots S_n$, ciascuno dei quali produce *articoli di un'unica tipologia.* Si assume che
- la produzione in ciascun settore S_k richieda la trasformazione di articoli prodotti nei vari settori S_i dell'economia, in quantità che dipendono linearmente dal livello di produzione nel settore S_k;
- la quota di produzione in ciascun settore, non destinata alla trasformazione da parte degli altri settori, sia assorbita dalla domanda dei consumatori "esterni" (cioè non appartenenti ai settori).

Indichiamo con
• x_i la *produzione* nell'unità di tempo del settore S_i, misurata in unità di misura opportune (numero di oggetti, di metri cubi, di tonnellate, di container, etc.)
• t_{ik} il *coefficiente tecnologico* che indica quante sono le unità di prodotto del settore S_i necessarie per produrre una unità di prodotto del settore S_k,
• d_i la *domanda esterna*, nell'unità di tempo, dell'articolo prodotto dal settore S_i.
Otteniamo allora le relazioni

$$x_i = \sum_k t_{ik} x_k + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

che esprimono il livello di produzione del settore S_i necessario per soddisfare le richieste di tutti i settori e la domanda esterna. Tali relazioni possono essere espresse in forma compatta, introducendo i vettori non negativi $\mathbf{x} = [\, x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \,]^T$, $\mathbf{d} = [\, d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n \,]^T$ e la matrice non negativa $T = [t_{ik}]$, tramite l'equazione

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{d}. \tag{11.21}$$

Gli elementi non nulli della colonna k-esima della matrice T corrispondono ai settori "di ingresso" a S_k, nel senso che i loro prodotti sono necessari per la produzione di S_k. I valori numerici della colonna rappresentano le unità di prodotto dei vari settori necessarie per ottenere un'unità di S_k. Gli elementi non nulli della riga i-esima corrispondono invece ai settori "di uscita" da S_i, cioè quelli verso cui si indirizza la produzione di S_i. Alla matrice T sono state attribuite varie denominazioni: matrice della tecnologia, matrice ingresso-uscita, matrice dei consumi.
Ipotizzare che T sia irriducibile equivale a supporre (cfr. proposizione 11.2.2, punto 2) che nessun sottoinsieme proprio di $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ sia "autosufficiente", ovvero possa funzionare senza utilizzare a sua volta prodotti provenienti da settori non appartenenti al sottoinsieme. Un'interpretazione analoga è fornita dal punto 3 della medesima proposizione: la produzione degli articoli di ν settori economici, con $\nu < n$, si avvale di almeno un articolo prodotto dagli altri settori.

Indichiamo ora con p_k e u_k *il prezzo e l'utile unitari* degli articoli prodotti dal settore S_k. Il prezzo di un articolo prodotto dal settore S_k è somma dei costi che il settore affronta per produrlo e dell'utile che consegue nel commercializzarlo: $p_k = \sum_i p_i t_{ik} + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$
Ponendo $\mathbf{p}^T = [\, p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n \,]$, $\mathbf{u}^T = [\, u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \,]$, otteniamo

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T T + \mathbf{u}^T \ . \tag{11.22}$$

In un mercato equo, è ragionevole attendersi che offerta $\mathbf{x}$ e domanda $\mathbf{d}$ soddisfino l'equazione

$$\mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{p}^T \mathbf{d}, \tag{11.23}$$

ovvero che l'utile totale netto conseguito nell'insieme di tutti i settori eguagli l'ammontare complessivo pagato dal mercato per gli articoli consumati.

11.3 Catene cicliche

Al punto (3) della proposizione 11.2.2 si è affrontato il problema di quale sia la struttura booleana della catena "ciclica" di vettori non negativi

$$\mathbf{g}, \ F\mathbf{g}, \ F^2\mathbf{g}, \ F^3\mathbf{g}, \dots \tag{11.24}$$

ottenuti a partire da un vettore $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$, quando la matrice F è irriducibile[8].
In questo paragrafo intendiamo ampliare l'indagine sulla struttura booleana delle catene cicliche (11.24), senza porre limitazioni a priori sulla natura della matrice nonnegativa F.

[8]Si tratta dei generatori dello spazio ciclico $< F|\mathbf{g} >$ considerato in Algebra Lineare (cfr. A.6.3)

Per ogni vettore $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^n$, denotiamo con supp($\mathbf{g}$) il "supporto" di $\mathbf{g}$, ovvero il sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, n\}$ costituito dagli indici delle componenti non nulle di $\mathbf{g}$

$$k \in \text{supp}(\mathbf{g}) \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{g}]_k > 0.$$

È chiaro che, per qualsiasi $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^n$ e per qualsiasi $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, si ha

$$\text{supp}(\mathbf{g}) \subseteq \text{supp}(\mathbf{g} + F\mathbf{g}) \subseteq \text{supp}(\mathbf{g} + F\mathbf{g} + F^2\mathbf{g}) \subseteq \ \ldots \tag{11.25}$$

Nella proposizione che segue riassumiamo alcune proprietà della catena (11.24).

Proposizione 11.3.1 [Stazionarietà dei supporti] *Siano $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ una matrice non negativa e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^n$ un vettore non negativo.*

i) Se $\text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu} F^i\mathbf{g}) = \text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu+1} F^i\mathbf{g})$, allora $\text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu+1} F^i\mathbf{g}) = \text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu+2} F^i\mathbf{g})$ e la successione (11.25) è stazionaria almeno dall'insieme $\text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu} F^i\mathbf{g})$ in avanti.

ii) La catena (11.25) è comunque stazionaria dall'insieme $\text{supp}(\sum_{i=0}^{n-1} F^i\mathbf{g})$ in avanti.

iii) Se $\ell \in \text{supp}(F^{n+h}\mathbf{g})$ per qualche $h \geq 0$, allora $\ell \in \text{supp}(\sum_{i=0}^{n-1} F^i\mathbf{g})$, ovvero se risulta positiva la componente ℓ-esima di $F^{n+h}\mathbf{g}$, la medesima componente è positiva in uno almeno fra i vettori $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \ldots, F^{n-1}\mathbf{g}$.

iv) Se in n vettori consecutivi di (11.24) è nulla la componente i-esima

$$(F^h\mathbf{g})_i = (F^{h+1}\mathbf{g})_i = \ldots = (F^{h+n-1}\mathbf{g})_i = \mathbf{0}, \tag{11.26}$$

la componente i-esima è nulla anche in tutti i vettori successivi $F^{h+n}\mathbf{g}, F^{h+n+1}\mathbf{g}, \ldots$. Quindi, se n vettori consecutivi di (11.24) sono nulli, lo sono anche tutti i vettori successivi.

Prova (i) Se $\text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu} F^i\mathbf{g}) = \text{supp}(\sum_{i=0}^{\nu+1} F^i\mathbf{g})$, verifichiamo che $(I + F + \ldots + F^\nu + F^{\nu+1})\mathbf{g}$ e $(I+F+\ldots+F^{\nu+1}+F^{\nu+2})\mathbf{g}$ hanno le medesime componenti nulle. A tale scopo, basta notare che i quattro vettori

$$\begin{aligned}
&(I + F + \ldots + F^\nu + F^{\nu+1} + F^{\nu+2})\mathbf{g},\\
&(I + F + \ldots + F^\nu + F^{\nu+1})\mathbf{g} + F(I + F + \ldots + F^\nu + F^{\nu+1})\mathbf{g},\\
&(I + F + \ldots + F^\nu)\mathbf{g} + F(I + F + \ldots + F^\nu)\mathbf{g},\\
&(I + F + \ldots + F^\nu + F^{\nu+1})\mathbf{g}
\end{aligned}$$

hanno le medesime componenti nulle.

(ii) è banalmente vera se $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, (11.25) è una successione monotona di sottoinsiemi non vuoti di $\{1, 2, \ldots, n\}$, quindi deve presentare entro il passo n-esimo un punto di stazionarietà e dopo tale passo, per il punto (i), essa rimane costante. Per tutti i vettori successivi a $\sum_{i=0}^{n-1} F^i\mathbf{g}$ risulta allora

$$\text{supp}(\sum_{i=0}^{n-1+h} F^i\mathbf{g}) = \text{supp}(\sum_{i=0}^{n-1} F^i\mathbf{g}) \quad h \geq 0. \tag{11.27}$$

(iii) Se la componente ℓ-esima di F^{n+h} è positiva, $\ell \in \text{supp}(\sum_{i=0}^{n+h} F^i \mathbf{g})$, quindi per (11.27) $\ell \in \text{supp}(\sum_{i=0}^{n-1} F^i \mathbf{g})$.
(iv) Posto $\mathbf{v} = F^h \mathbf{g}$, la (11.26) equivale a $(\mathbf{v})_i = (F\mathbf{v})_i = \ldots = (F^{n-1}\mathbf{v})_i = 0$. Per (ii) risulta allora $(F^{n+k}\mathbf{v})_i = 0,\ k = 0, 1, \ldots$, e quindi $F^{n+h+k}\mathbf{g} = \mathbf{0},\ k = 0, 1, \ldots$. ■

- Esercizio 11.3.1 Si provi l'implicazione (5") $\Rightarrow$ (5) nella proposizione 11.2.2 senza ricorrere al teorema di Cayley-Hamilton.

Il seguente risultato è di fondamentale importanza nello studio della raggiungibilità dei sistemi positivi.

Proposizione 11.3.2 [Vettori monomi in una catena ciclica: teorema di Coxson-Larson] *Siano $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ una matrice non negativa e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^n$ un vettore positivo. Se per qualche $k \geq n$ il vettore $F^k\mathbf{g}$ è ℓ-monomio, allora uno almeno fra $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \ldots F^{n-1}\mathbf{g}$ è ℓ-monomio a sua volta.*

Prova Dimostreremo l'asserto nel caso in cui sia $k = n$, verificando che, se $\mathbf{g}$ è positivo ed $F^n\mathbf{g}$ è ℓ-monomio, allora è ℓ-monomio almeno uno fra $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \ldots, F^{n-1}\mathbf{g}$.
Nel caso in cui sia $k > n$, basterà porre allora $\tilde{\mathbf{g}} = F^{k-n}\mathbf{g}$. Essendo ℓ-monomio il vettore $F^n\tilde{\mathbf{g}}$, per qualche $\nu < n$ sarà ℓ-monomio il vettore $F^\nu\tilde{\mathbf{g}} = F^{k-(n-\nu)}\mathbf{g} = F^h\mathbf{g}$, con $h = k-(n-\nu) < k$. Se $h < n$ si conclude, altrimenti basta iterare il ragionamento.
Assumiamo quindi che il vettore $F^n\mathbf{g}$ sia ℓ-monomio e riformuliamo il problema riferendoci al grafo di influenza della coppia $(F, \mathbf{g})$. Esso consta di $1 + n$ vertici, che identificheremo con gli elementi dell'insieme $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, e degli archi orientati che li connettono:

- c'è un arco da 0 a $j > 0$ se e solo se $g_j > 0$,
- c'è un arco da $j > 0$ a $i > 0$ se e solo se $f_{ij} > 0$.

Conseguentemente, se $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ denota il supporto di $\mathbf{g}$,

- il supporto del vettore $F\mathbf{g}$ (del vettore $F^r\mathbf{g}$, $\forall r > 0$) è costituito dall'insieme dei vertici j ai quali si perviene con un cammino di un arco (di r archi) che nel grafo[9] di F parta dagli elementi di S;
- l'ipotesi che $F^n\mathbf{g}$ sia ℓ-monomio corrisponde ad assumere che nel grafo di F esistano cammini di lunghezza n con inizio in S, e che tali cammini si concludano tutti al passo n-esimo nel vertice ℓ;
- provare che $F^\nu\mathbf{g}$ è ℓ-monomio per qualche $\nu \geq 0$ equivale a provare che, nel grafo di F, esistono cammini di lunghezza ν con inizio in S e che tali cammini si concludono tutti nel vertice ℓ.

Per procedere, ci serviremo del seguente

Lemma 11.3.3 [Circuiti nel grafo di F] *Nelle ipotesi della proposizione 11.3.2, nel grafo di F*

i) ogni cammino di n (o più) archi contiene un circuito.

[9] ovvero nel grafo con n vertici $\{1, 2, \ldots, n\}$ associato alla sola matrice F

Se poniamo $S = \{j : j \in \mathrm{supp}(\mathbf{g})\}$ e se $F^n\mathbf{g}$ è ℓ-monomio, allora

ii) ogni circuito γ facente parte di un cammino π con inizio in S include il vertice ℓ;

iii) i circuiti che fanno parte di cammini con inizio in S hanno tutti la medesima lunghezza c (i.e. includono il medesimo numero c di vertici distinti).

Prova del Lemma 11.3.3 *i*) Ovvio: il grafo di F ha n vertici, quindi almeno uno di essi viene incontrato due volte.

ii) Supponiamo che qualche circuito γ non passi per ℓ, pur facendo parte di un cammino π con origine in $s \in S$.
Consideriamo il cammino π^* di lunghezza minima che connette s a uno qualsiasi dei vertici di γ; ovviamente π^* non attraversa due volte lo stesso vertice, altrimenti potrebbe essere sostituito da un cammino più breve. Quindi π^* ha lunghezza inferiore a n e potrebbe essere proseguito indefinitamente (in particolare fino al passo n-esimo) "ciclando" su γ. Avremmo costruito in tal modo un cammino con origine in S e che al passo n-esimo non transita per ℓ.

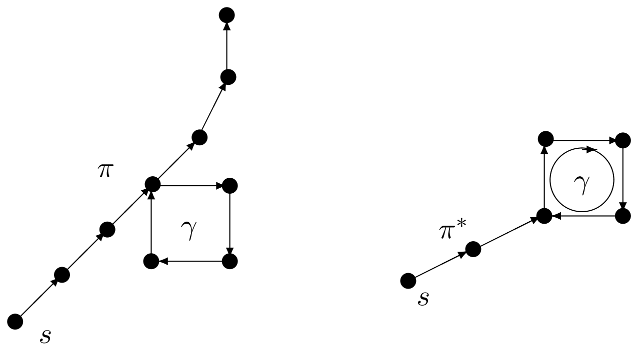

Figura 11.3.1

iii) Siano γ e γ' due circuiti, di lunghezza rispettivamente c e c', facenti parte entrambi di cammini con inizio in S, e supponiamo sia $c > c'$. Per il punto precedente γ e γ' hanno almeno il vertice ℓ in comune. Sia ora ρ un cammino di lunghezza minima r, certamente minore di n, che congiunge un vertice di S con ℓ e consideriamo due diversi completamenti di ρ a un cammino di n passi.

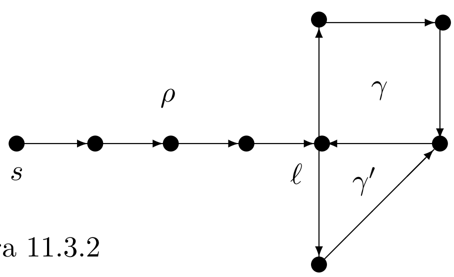

Figura 11.3.2

Il primo completamento π' consiste nel proseguire da ℓ percorrendo il circuito più breve γ' una sola volta e passare poi a descrivere fino al passo n-esimo il circuito più lungo; il secondo, π, prevede invece di proseguire da ℓ fino al passo n-esimo rimanendo sul circuito più lungo γ. Poichè, in base all'ipotesi, dopo n passi ogni cammino con origine in S transita per ℓ, i due cammini π' e π includono un numero intero di copie dei due circuiti in questione e soddisfano quindi, per opportuni interi a e b,

$$\begin{aligned} n &= r + c' + bc \qquad b \geq 0, \\ n &= r + ac \qquad\quad a > 0 \end{aligned} \tag{11.28}$$

Si ottiene allora $c' = (a - b)c$, relazione evidentemente assurda essendo $c > c'$ ■

Ritorniamo ora alla prova della Proposizione 11.3.2.e dimostriamo che nel grafo di F ogni cammino π che abbia inizio nell'insieme S e lunghezza $n - c$ (dove c è stato definito nel lemma 11.3.3) termina nel vertice ℓ.

Poiché $F^n\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ esistono certamente cammini di lunghezza $n - c$. con origine in S e lunghezza $n - c$. Supponiamo, per assurdo, che uno di essi, π, abbia $\ell' \neq \ell$ come vertice terminale.

• Se i vertici di π^* non sono tutti distinti, π^* include qualche circuito γ, che sarà descritto $\nu \geq 1$ volte e che, per il lemma 11.3.3, ha lunghezza c. Allora il cammino π che si ottiene da π^* descrivendolo $\nu + 1$ volte inizia in S, ha lunghezza n e non termina in ℓ, e ciò contraddice l'ipotesi che $F^n g$ sia ℓ-monomio.

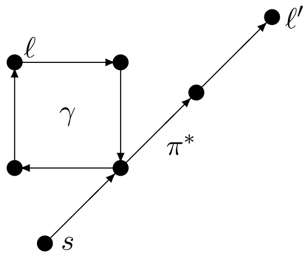

Figura 11.3.3

• Se i vertici di π^* sono tutti distinti, basterà considerare un arbitrario circuito γ di lunghezza c (l'esistenza di γ è garantita dal lemma 11.3.3). Poiché il grafo ha n vertici, uno almeno di essi, j, appartiene sia a π^* che a γ e il cammino che si ottiene descrivendo π^* fino a j, poi il circuito γ e infine π^* da j a ℓ' ha lunghezza n, ma non termina in ℓ.

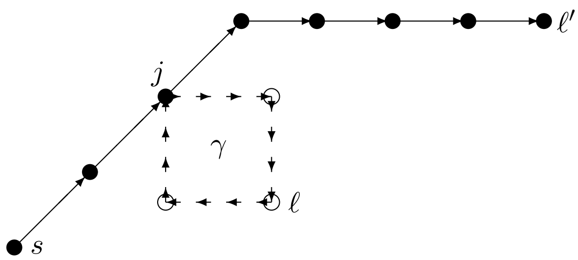

Figura 11.3.4

Abbiamo così verificato che ogni cammino con origine in S e lunghezza $n-c$ termina in ℓ, quindi il vettore $F^{n-c}\mathbf{g}$ è ℓ-monomio. ■

- Esercizio 11.3.2 Siano $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^n$. Si verifichi che

i) se $F^k\mathbf{g}$ è un vettore ℓ-monomio per qualche $k > 0$, la matrice F contiene almeno una colonna ℓ-monomia.

ii) se l'insieme $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \dots F^{n-1}\mathbf{g}, \dots$ contiene vettori ℓ-monomi per ogni ℓ compreso fra 1 ed n, allora F^T è cogrediente a una matrice compagna e $\mathbf{g}$ è vettore monomio. È vero il viceversa?

- Esercizio 11.3.3* Con riferimento alla dimostrazione della Proposizione 11.3.3, si supponga che i cammini che hanno inizio nell'insieme S raggiungano soltanto $n' < n$ vertici del grafo di F. Si verifichi che

i) $L := \mathrm{supp}(\mathbf{g} + F\mathbf{g} + \dots + F^{n-1}\mathbf{g})$ consta esattamente di n' elementi;

ii) se $F^k\mathbf{g}$ è ℓ-monomio, allora è tale uno almeno fra i vettori $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, \dots F^{n'-1}\mathbf{g}$;

iii) ogni colonna di F con indice corrispondente a un elemento di supp($\mathbf{g}$) ha per supporto un sottoinsieme di L.

11.4 Proprietà spettrali : teorema di Perron

In questo paragrafo e nei due successivi intendiamo studiare l'evoluzione libera dei sistemi discreti positivi evidenziandone le connessioni con le proprietà spettrali della matrice F che conseguono dall'ipotesi di non negatività.
Probabilmente il risultato più importante sulle matrici positive è il teorema di Perron Frobenius. L'interesse di questo risultato riguarda sia la teoria astratta delle matrici positive - e più in generale degli operatori positivi - sia le sue applicazioni allo studio dei sistemi positivi, delle catene di Markov, etc. Esso può essere formulato a diversi livelli di generalità: la formulazione originale di Perron, limitata alle matrici strettamente positive e alle matrici primitive, e che costituirà il nucleo di questo paragrafo, è stata estesa da Frobenius alle matrici irriducibili, delle quali ci occuperemo nel paragrafo seguente. Particolarmente interessante è la struttura dello "spettro periferico", ovvero dell'insieme degli autovalori a massimo modulo, le cui proprietà si estendono, in parte, dal caso delle matrici irriducibili a quello delle matrici non negative generiche.

11.4.1 Spettro delle matrici strettamente positive

Premettiamo all'enunciazione del teorema di Perron alcune osservazioni che ci saranno utili nella dimostrazione e di cui ci avvarremo anche nei paragrafi successivi.

Osservazione 1. Se $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ denota un vettore complesso e $|\mathbf{v}| \in \mathbb{R}_+^n$ è il vettore costituito dai moduli delle componenti di $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{v}| = \begin{bmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{bmatrix}, \tag{11.29}$$

i trasformati dei due vettori secondo una matrice $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ verificano la diseguaglianza

$$F|\mathbf{v}| = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_{1j}|v_j| \\ \vdots \\ \sum f_{nj}|v_j| \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} |\sum f_{1j}v_j| \\ \vdots \\ |\sum f_{nj}|v_j \end{bmatrix} = |F\mathbf{v}| \tag{11.30}$$

Osservazione 2. Data una matrice (non necessariamente non negativa) $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, conviene talvolta considerare, accanto agli autovettori "destri", cioè ai vettori colonna non nulli $\mathbf{v}$ soddisfacenti la condizione $F\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, gli autovettori "sinistri", vettori riga non nulli $\mathbf{w}^T$ soddisfacenti la condizione $\mathbf{w}^T F = \lambda\mathbf{w}^T$. La teoria della base di Jordan si applica ancora, con gli ovvi aggiustamenti, e porta alla scomposizione dello spazio in autospazi generalizzati sinistri.

- Esercizio 11.4.1 Si dimostri che la base "sinistra" di Jordan ha, per ciascun autovalore λ di F, lo stesso numero di catene di autovettori generalizzati sinistri, della medesima lunghezza delle catene di autovettori generalizzati destri.

  ♯ *Suggerimento. Basta ricordare che la struttura "destra" di Jordan relativa all'autovalore λ dipende dalla dimensione dei nuclei destri di $(F-\lambda I)^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$. Lo stesso vale per la struttura "sinistra". Si dimostri quindi che il nucleo destro e il nucleo sinistro di una matrice quadrata M hanno la medesima dimensione.*

Se $\mathbf{w}_1^T$ è un autovettore sinistro relativo all'autovalore μ e $\mathbf{v}_1$ è un autovettore destro relativo all'autovalore λ, da $\mathbf{w}_1^T F = \mu\mathbf{w}_1^T$ e $F\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ si ricava

$$\mathbf{w}_1^T F\mathbf{v}_1 = \mu\mathbf{w}_1^T\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{w}_1^T\mathbf{v}_1; \tag{11.31}$$

quindi, se $\mu \neq \lambda$, deve essere

$$\mathbf{w}_1^T\mathbf{v}_1 = 0. \tag{11.32}$$

Anche nel caso in cui $\mathbf{w}_s^T$ e $\mathbf{v}_d$ siano autovettori generalizzati, sinistro, di ordine s e relativo all'autovalore μ il primo, destro, di ordine d e relativo all'autovalore $\lambda \neq \mu$ il secondo, se $\lambda \neq \mu$ si ha $\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d = 0$. Per provarlo, assumiamo induttivamente che la conclusione valga per tutte le coppie di autovettori generalizzati sinistri e destri la cui somma degli ordini non ecceda k. Se $\mathbf{w}_s^T$ e $\mathbf{v}_d$ sono autovettori generalizzati soddisfacenti $s + d = k + 1$, da

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_s^T F &= \mu\mathbf{w}_s^T + \mathbf{w}_{s-1}^T \quad \text{con } \mathbf{w}_0^T = \mathbf{0} \\ F\mathbf{v}_d &= \lambda\mathbf{v}_d + \mathbf{v}_{d-1} \quad \text{con } \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{11.33}$$

e dall'ipotesi induttiva segue

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_s^T F\mathbf{v}_d &= \mu\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d + \mathbf{w}_{s-1}^T\mathbf{v}_d = \mu\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d \\ &= \lambda\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d + \mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_{d-1} = \lambda\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d \end{aligned} \tag{11.34}$$

Quindi vale[10]

$$\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d = 0. \tag{11.36}$$

[10] Il prodotto interno fra vettori (colonna) di $\mathbb{C}^n$ si definisce ponendo

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle := \check{\mathbf{z}}^T\mathbf{y}. \tag{11.35}$$

Esso ha le seguenti proprietà $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle^\vee$, $\langle \lambda\mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle = \check{\lambda}\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle$ e $\langle \mathbf{z}, \lambda\mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle$. La condizione (11.36) $\mathbf{w}_s^T\mathbf{v}_d = 0$ equivale allora a $\langle \check{\mathbf{w}}_s, \mathbf{v}_d\rangle = 0$, in cui $\check{\mathbf{w}}_s^T$ è un autovettore generalizzato sinistro relativo a $\check{\mu}$. Quindi, nel prodotto interno definito da (11.35), se λ e μ sono autovalori distinti di F, ogni autovettore generalizzato destro di F relativo a λ è ortogonale a ogni autovettore generalizzato sinistro relativo a $\check{\mu} \neq \lambda$.

Proposizione 11.4.1 [Matrici strettamente positive: teorema di Perron] *Se $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è una matrice strettamente positiva, allora*

i) [Autovettore e autovalore strettamente positivi] *esistono un numero reale $\lambda_0 > 0$ e un vettore $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ tali che*

$$F\mathbf{v}_0 = \lambda_0 \mathbf{v}_0; \tag{11.37}$$

ii) [Massimalità di λ_0] *per ogni altro autovalore $\lambda \in \Lambda(F)$ si ha $|\lambda| < \lambda_0$;*

iii) [Spettro periferico] *λ_0 è radice semplice del polinomio caratteristico di F, ossia è un autovalore con molteplicità algebrica 1;*

iv) [Unicità dell'autovettore positivo e base di Jordan] *$\mathbf{v}_0$ è, a meno di un fattore di proporzionalità positivo, l'unico autovettore positivo della matrice F. Rispetto alla base di Jordan, ogni vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ha componente positiva su $\mathbf{v}_0$;*

v) [Monotonicità dell'autovalore dominante] *Se $\bar{F}$ è maggiore di F, ovvero $\bar{F} - F > 0$, il corrispondente autovalore positivo massimale $\bar{\lambda}_0$ soddisfa la diseguaglianza $\bar{\lambda}_0 > \lambda_0$.*

Prova i) Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^n$ l'insieme dei vettori non negativi e a somma delle componenti unitaria (vettori di probabilità)

$$\mathcal{S} := \Big\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \ \forall i \Big\}. \tag{11.38}$$

Indichiamo con $(F\mathbf{x})_i$ la i-esima componente di $F\mathbf{x}$ e definiamo la mappa

$$\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : \mathbf{x} \mapsto \frac{F\mathbf{x}}{\sum_{i=1}^n (F\mathbf{x})_i} \tag{11.39}$$

Essa è definita correttamente: poiché $\mathbf{x}$ ha almeno una componente positiva e F è matrice strettamente positiva, il vettore $F\mathbf{x}$ è strettamente positivo, il denominatore $\sum_{i=1}^n (F\mathbf{x})_i$ è un numero positivo e si verifica immediatamente che $F\mathbf{x}/\sum_{i=1}^n (F\mathbf{x})_i$ è un vettore di $\mathcal{S}$. Poiché l'insieme $\mathcal{S}$ è chiuso, limitato e convesso e ϕ è continua, si può applicare il teorema del punto fisso di Brouwer-Tychonov (vedi Cap.3, Proposizione 3.1.2) e concludere che esiste un vettore $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{S}$ per cui risulta

$$\mathbf{v}_0 = \phi(\mathbf{v}_0) = \frac{F\mathbf{v}_0}{\sum_{i=1}^n (F\mathbf{v}_0)_i} \tag{11.40}$$

Ponendo

$$\lambda_0 := \sum_{i=1}^n (F\mathbf{v}_0)_i > 0, \tag{11.41}$$

si ha subito la (11.37), mentre risulta $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ perché $F\mathbf{v}_0$ è strettamente positivo.

ii) Applicando il ragionamento precedente alla matrice F^T, si dimostra l'esistenza di un autovettore $\mathbf{w}_0 \gg \mathbf{0}$, corrispondente a un autovalore $\mu_0 > 0$

$$F^T \mathbf{w}_0 = \mu_0 \mathbf{w}_0. \tag{11.42}$$

Da (11.37) e (11.42) segue

$$\mu_0 \mathbf{w}_0^T \mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0^T F \mathbf{v}_0 = \lambda_0 \mathbf{w}_0^T \mathbf{v}_0 \tag{11.43}$$

e, risultando $\mathbf{w}_0^T \mathbf{v}_0 > 0$, si ha $\mu_0 = \lambda_0$.
Sia ora $\lambda \neq \lambda_0$ un altro autovalore di F, eventualmente complesso, e sia $\mathbf{u}$ il corrispondente autovettore, anch'esso eventualmente complesso. Tenuto conto di (11.30), si ha la diseguaglianza

$$F|\mathbf{u}| \geq |F\mathbf{u}| = |\lambda \mathbf{u}| = |\lambda||\mathbf{u}|. \tag{11.44}$$

Premoltiplicando (11.44) per $\mathbf{w}_0^T$ si ottiene

$$\lambda_0 \mathbf{w}_0^T |\mathbf{u}| = \mathbf{w}_0^T F |\mathbf{u}| \geq |\lambda| \, \mathbf{w}_0^T \, |\mathbf{u}| \tag{11.45}$$

e, tenuto conto che $\mathbf{w}_0^T \, |\mathbf{u}|$ è positivo, si conclude che ogni autovalore λ di F soddisfa la diseguaglianza

$$|\lambda| \leq \lambda_0. \tag{11.46}$$

Consideriamo infine la matrice $F - \epsilon I$, il cui spettro si ottiene sottraendo ϵ a tutti gli autovalori di F. Se ϵ è positivo ma sufficientemente piccolo, la matrice $F - \epsilon I$ rimane strettamente positiva e ad essa si applicano i risultati finora ottenuti. In particolare, il numero $\lambda_0 - \epsilon$ rappresenta il massimo autovalore positivo di $F - \epsilon I$, mentre $\lambda - \epsilon$ è un altro autovalore di $F - \epsilon I$, il cui modulo quindi non può eccedere $\lambda_0 - \epsilon$.
Se in (11.46) fosse $|\lambda| = \lambda_0$, avremmo

$$|\lambda - \epsilon| \leq \lambda_0 - \epsilon = |\lambda| - \epsilon \tag{11.47}$$

e rappresentando i numeri complessi in gioco come vettori del piano di Gauss, (11.47) comporta che, nel triangolo i cui lati sono i vettori $\lambda, \epsilon, \lambda - \epsilon$, il lato λ abbia lunghezza non inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due. Ciò è possibile solo se il triangolo è degenere: i vettori λ e $\lambda - \epsilon$ devono essere paralleli ed equiversi al vettore ϵ, che rappresenta un numero reale positivo. Ma allora λ sarebbe reale positivo e coinciderebbe con λ_0.

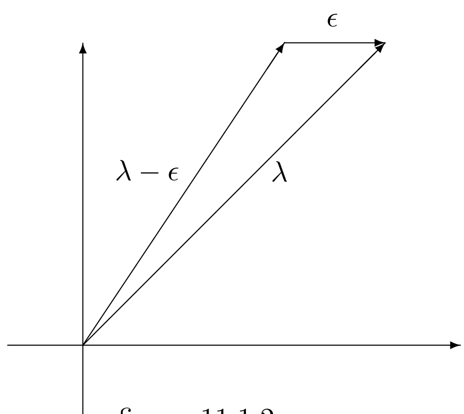

figura 11.1.2

iii) Proviamo dapprima che λ_0 ha molteplicità geometrica 1, ovvero che l'autospazio U_{λ_0} ha dimensione 1. Se, oltre a $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$, in U_{λ_0} ci fosse un altro autovettore $\mathbf{u}_0$ linearmente indipendente da $\mathbf{v}_0$, esso sarebbe reale perché tale è λ_0, e potremmo scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$

in modo che la combinazione lineare $\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{u}_0$ sia un autovettore non negativo, ma non strettamente positivo. Atteso che F è strettamente positiva, da

$$F(\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{u}_0) = \lambda_0(\mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{u}_0) \tag{11.48}$$

segue una contraddizione, perché il membro di sinistra è strettamente positivo, mentre non lo è quello di destra.
Supponiamo ora che la molteplicità algebrica di λ_0 sia maggiore di 1. Allora esiste una catena di Jordan relativa a λ_0 di lunghezza almeno 2, e quindi un autovettore generalizzato $\mathbf{v}_0^{(2)}$ di ordine 2 per cui risulta

$$\mathbf{v}_0 = (F - \lambda_0 I)\mathbf{v}_0^{(2)} \tag{11.49}$$

Premoltiplicando (11.49) per l'autovettore sinistro $\mathbf{w}_0^T \gg \mathbf{0}^T$ relativo a λ_0, si perviene all'assurdo

$$0 < \mathbf{w}_0^T\mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0^T(F - \lambda_0 I)\mathbf{v}_0^{(2)} = 0. \tag{11.50}$$

Quindi λ_0 è radice semplice del polinomio caratteristico di F.

iv) Sia $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ un autovettore di F relativo a un arbitrario autovalore λ. Premoltiplicando $F\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \gg \mathbf{0}$ per $\mathbf{w}_0^T \gg \mathbf{0}$ e tenendo conto che $\mathbf{w}_0^T\mathbf{u}$ è positivo, da

$$\lambda_0\mathbf{w}_0^T\mathbf{u} = \mathbf{w}_0^T F\mathbf{u} = \lambda\mathbf{w}_0^T\mathbf{u} \tag{11.51}$$

si ricava $\lambda = \lambda_0$ e quindi, per il punto (iii), $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, ovvero l'autovettore positivo è (proporzionale a) $\mathbf{v}_0$.
Se rappresentiamo un generico vettore positivo $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_i$ di una base di Jordan che include $\mathbf{v}_0$

$$\mathbf{x} = \alpha_0\mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\mathbf{v}_i, \tag{11.52}$$

premoltiplichiamo primo e secondo membro per $\mathbf{w}_0^T$ e teniamo conto della (11.36), otteniamo

$$0 < \mathbf{w}_0^T\mathbf{x} = \alpha_0\mathbf{w}_0^T\mathbf{v}_0 \tag{11.53}$$

che dimostra che ogni vettore positivo ha, nella base di Jordan, componente positiva secondo $\mathbf{v}_0$.

v) Poichè $\bar{F}$ è anch'essa strettamente positiva, per il punto (i) esistono $\bar{\lambda}_0 > 0$ e $\bar{\mathbf{v}}_0 \gg \mathbf{0}$, autovalore e autovettore destro di $\bar{F}$, per cui vale la

$$\bar{\lambda}_0\bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{F}\bar{\mathbf{v}}_0 = F\bar{\mathbf{v}}_0 + (\bar{F} - F)\bar{\mathbf{v}}_0.$$

Premoltiplicando per $\mathbf{w}_0^T$, l'autovettore sinistro strettamente positivo di F, si ottiene allora

$$\bar{\lambda}_0\mathbf{w}_0^T\bar{\mathbf{v}}_0 = \lambda_0\mathbf{w}_0^T\bar{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{w}_0^T(\bar{F} - F)\bar{\mathbf{v}}_0$$

nella quale sono positivi entrambi gli scalari $\mathbf{w}_0^T\bar{\mathbf{v}}_0$ e $\mathbf{w}_0^T(\bar{F} - F)\bar{\mathbf{v}}_0$. Quindi deve essere $\bar{\lambda}_0 > \lambda_0$. ■

L'autovalore positivo λ_0, di valore eguale al raggio spettrale di F, e l'autovettore corrispondente $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ si chiamano di solito autovalore e autovettore "di Perron" (o "di Perron -Frobenius").

- ESERCIZIO 11.4.2 La matrice strettamente positiva
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
ha 3 come autovalore di Perron e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ come corrispondente autovettore destro. Il secondo autovalore è 1, cui corrisponde l'autovettore destro non positivo $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- ESERCIZIO 11.4.3 Con riferimento alla (11.39), se $c_j := \sum_{i=1}^{n} [F]_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots, n$ è la somma degli elementi della colonna j-esima della matrice F, si verifichi che, per ogni vettore di probabilità $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, il denominatore $\sum_{i=1}^{n} (F\mathbf{x})_i$ è non inferiore a $\min_{j=1,\ldots,n} c_j$. Il risultato vale anche se F è una matrice non negativa arbitraria?

11.4.2 Spettro delle matrici primitive

L'enunciato del teorema di Perron si estende senza alcuna modifica alle matrici primitive. La prova dipende dal fatto che la potenza di una matrice primitiva corrispondente all'esponente di primitività è una matrice strettamente positiva.

Proposizione 11.4.2 [MATRICI PRIMITIVE: TEOREMA DI PERRON] *I punti i), ii), iii) iv) e v) della proposizione 11.4.1 valgono anche quando F è una matrice primitiva.*

PROVA i) Supponiamo che l'esponente di primitività di F sia $p > 1$. Indichiamo con $\tilde{\lambda}_0 > 0$ l'autovalore di Perron della matrice strettamente positiva F^p, con $\tilde{\mathbf{v}}_0 \gg \mathbf{0}$ il corrispondente autovettore destro e con λ_0 la radice aritmetica p-esima di $\tilde{\lambda}_0$. Allora

$$\mathbf{0} = (F^p - \lambda_0^p I)\tilde{\mathbf{v}}_0 = (F - \lambda_0 I)(F^{p-1} + \lambda_0 F^{p-2} + \ldots + \lambda_0^{p-1} I)\tilde{\mathbf{v}}_0 \tag{11.54}$$

garantisce che il vettore strettamente positivo $\mathbf{v}_0 := (F^{p-1} + \lambda_0 F^{p-2} + \ldots + \lambda_0^{p-1} I)\tilde{\mathbf{v}}_0$ è autovettore di F relativo all'autovalore positivo λ_0. Da

$$\begin{aligned} F^p \mathbf{v}_0 &= F^p (F^{p-1} + \lambda_0 F^{p-2} + \ldots + \lambda_0^{p-1} I)\tilde{\mathbf{v}}_0 \\ &= (F^{p-1} + \lambda_0 F^{p-2} + \ldots + \lambda_0^{p-1} I) F^p \tilde{\mathbf{v}}_0 \\ &= (F^{p-1} + \lambda_0 F^{p-2} + \ldots + \lambda_0^{p-1} I)\lambda_0^p \tilde{\mathbf{v}}_0 \\ &= \lambda_0^p (F^{p-1} + \lambda_0 F^{p-2} + \ldots + \lambda_0^{p-1} I)\tilde{\mathbf{v}}_0 = \lambda_0^p \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

segue che $\mathbf{v}_0$ è anch'esso, al pari di $\tilde{\mathbf{v}}_0$, un autovettore positivo della matrice $F^p \gg 0$. Quindi $\mathbf{v}_0$ e $\tilde{\mathbf{v}}_0$ differiscono per un fattore moltiplicativo positivo e $\tilde{\mathbf{v}}_0$ è a sua volta autovettore di F relativo a λ_0. È poi immediato che F ha anche un autovettore sinistro $\mathbf{w}_0^T \gg \mathbf{0}^T$, corrispondente all'autovalore λ_0.

Per i punti ii) e iii) osserviamo anzitutto che lo spettro di F^p si ottiene da quello di F elevandone gli autovalori alla potenza p-esima. Se $\lambda \in \Lambda(F)$

- λ non può avere modulo maggiore di λ_0. Altrimenti F^p avrebbe un autovalore λ^p il cui modulo eccede $\tilde{\lambda}_0$;
- se $|\lambda| = \lambda_0$, allora $\lambda = \lambda_0$. Altrimenti F^p avrebbe più autovalori di modulo $\tilde{\lambda}_0$, oppure l'autovalore di Perron $\tilde{\lambda}_0$ avrebbe molteplicità algebrica maggiore di uno;
- se $\lambda = \lambda_0$, esso ha molteplicità algebrica uno. Altrimenti avrebbe molteplicità maggiore di uno l'autovalore di Perron $\tilde{\lambda}_0$ della matrice F^p.

Per il punto iv), se $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ è autovettore di F relativo all'autovalore λ, allora è anche autovettore di F^p relativo all'autovalore $\lambda^p = \tilde{\lambda}_0$. Essendo $\mathbf{v}_0$ autovettore destro di Perron relativo a F^p, risulta $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.
D'altra parte, se si rappresenta un vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ nella base di Jordan di F, $\mathbf{x} = \alpha_0\mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\mathbf{v}_i$, vale ancora la (11.53) perché l'autovettore sinistro $\mathbf{w}_0^T$ di F relativo a λ_0 è strettamente positivo. Quindi $\mathbf{x}$ ha una componente positiva rispetto a $\mathbf{v}_0$ nella base di Jordan di F.

Per il punto v) si procede come per le matrici strettamente positive: se $\Delta := \bar{F} - F$ è positiva, indichiamo con $\mathbf{w}_0^T \gg \mathbf{0}^T$ e $\bar{\mathbf{v}}_0 \gg \mathbf{0}$ rispettivamente l'autovettore di Perron sinistro per F e quello di Perron destro per $\bar{F}$ (anch'essa, ovviamente, primitiva). Da

$$\bar{\lambda}_0\mathbf{w}_0^T\bar{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{w}_0^T\left(\bar{F}\bar{\mathbf{v}}_0\right) = (\mathbf{w}_0^T(F+\Delta))\bar{\mathbf{v}}_0 = \lambda_0\mathbf{w}_0^T\bar{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{w}_0^T\Delta\bar{\mathbf{v}}_0,$$

attesa la stretta positività di $\mathbf{w}_0^T$ e di $\bar{\mathbf{v}}_0$ segue

$$\bar{\lambda}_0 - \lambda_0 = \frac{\mathbf{w}_0^T\Delta\bar{\mathbf{v}}_0}{\mathbf{w}_0^T\bar{\mathbf{v}}_0} > 0. \qquad \blacksquare$$

In un sistema lineare positivo descritto da una matrice F primitiva, e in particolare da una strettamente positiva, la dinamica libera a partire da qualsiasi condizione iniziale positiva $\mathbf{x}(0)$ ha l'autovettore di Perron $\mathbf{v}_0$ come autovettore dominante. Infatti lo stato iniziale ha una componente α positiva secondo $\mathbf{v}_0$ ed esiste un unico autovalore dominante λ_0, con molteplicità algebrica unitaria.
Pertanto il movimento libero può essere approssimato asintoticamente dalla successione

$$\alpha\mathbf{v}_0,\quad \alpha\lambda_0\mathbf{v}_0,\quad \alpha\lambda_0^2\mathbf{v}_0,\quad \alpha\lambda_0^3\mathbf{v}_0,\quad \dots$$

Esempio 11.4.1 [Modello a classi di età] Riprendiamo il modello di Leslie considerato nel primo capitolo. In assenza di fenomeni migratori la popolazione evolve secondo l'equazione:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{11.55}$$

Sotto opportune condizioni sui tassi di fertilità α_i e di sopravvivenza β_i la matrice F è primitiva, quindi ammette un autovettore di Perron $\mathbf{v}_0$ strettamente positivo, con il quale il vettore di popolazione $\mathbf{x}(t)$ tende ad allinearsi al divergere di t, qualunque sia la distribuzione iniziale di popolazione.

Consideriamo alcuni semplici casi:

(i) tassi di sopravvivenza e di fertilità tutti positivi. È evidente che le matrici $F^2, F^3, \dots$ hanno strettamente positive rispettivamente le prime due righe, le prime tre righe, etc. Quindi F^n è strettamente positiva e F è primitiva.

(ii) un tasso di sopravvivenza β_i nullo, oppure il tasso di fertilità α_n nullo. La $(i+1)$-esima riga o l'ultima colonna sono nulle in F e in tutte le sue potenze. Quindi F non è irriducibile e non può essere primitiva.

(iii) tassi di sopravvivenza tutti positivi, α_n unico tasso di fertilità positivo. La matrice F è irriducibile: ipotizzando unitari tutti i termini non nulli, si ottiene infatti

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, F^2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_{n-2} & 0 \end{bmatrix}, F^3 = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ I_{n-3} & 0 \end{bmatrix}, \dots, F^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ I_1 & 0 \end{bmatrix}, F^n = I_n$$

e quindi $\sum_{i=1}^{n-1} F^i$ è strettamente positiva. La stessa conclusione vale se ai termini unitari si sostituiscono arbitrari elementi positivi. Chiaramente la matrice F non è primitiva.

(iv) tassi di sopravvivenza tutti positivi, α_n e altri tassi di fertilità positivi. Per il punto precedente F è irriducibile. È naturale domandarsi quali altri tassi di fertilità devono essere positivi affinché F sia primitiva. Riprenderemo l'argomento più avanti.

Quando F è primitiva (ma anche quando F è irriducibile, come conseguenza della successiva proposizione 11.5.1) la struttura dell'autovettore di Perron $\mathbf{v}_0 = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T$ si ricava molto facilmente imponendo la condizione

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Eguagliando le componenti del membro di sinistra e di quello di destra e ponendo $\xi_1 = 1$, si ottiene

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1/\lambda_0 \\ \beta_1\beta_2/\lambda_0^2 \\ \vdots \\ \beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}/\lambda_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

L'autovalore dominante λ_0 può essere interpretato come il "tasso naturale di crescita" della popolazione. Infatti essa cresce esattamente secondo tale tasso quando il vettore iniziale di popolazione è (proporzionale al)l'autovettore dominante $\mathbf{v}_0$; per popolazioni con distribuzione iniziale diversa fra le classi, il vettore di popolazione tende asintoticamente ad allinearsi con il vettore $\mathbf{v}_0$ e quindi a raggiungerne la distribuzione. Quando essa è raggiunta, in ogni intervallo di tempo le classi d'età vengono moltiplicate tutte per il medesimo fattore λ_0, cosicché la popolazione cresce - o diminuisce - nel suo complesso, ma le proporzioni fra le classi di età rimangono inalterate.

11.5 Proprietà spettrali: la teoria di Frobenius

Nel caso di matrici irriducibili, il teorema di Perron viene sostituito da un enunciato più articolato, dovuto a Frobenius: lo spettro "periferico", ovvero l'insieme degli autovalori aventi modulo eguale al raggio spettrale, può non contenere un solo elemento, ma ha una configurazione assai particolare, come assai particolare è la struttura degli autovettori corrispondenti agli autovalori periferici, secondo quanto sarà precisato nel corollario 11.5.3.

11.5.1 Spettro delle matrici irriducibili

Proposizione 11.5.1 [Matrici irriducibili: teorema di Frobenius-Perron] *Se $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ è una matrice irriducibile, allora*

i) [Autovettore e autovalore strettamente positivi] *esistono un numero reale $\lambda_0 > 0$ e un vettore $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ tali che*

$$F\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0; \tag{11.56}$$

ii) [Massimalità di λ_0] *per ogni altro autovalore $\lambda \in \Lambda(F)$ si ha $|\lambda| \leq \lambda_0$;*

iii) [Spettro periferico e struttura generale dello spettro] *ogni autovalore λ con $|\lambda| = \lambda_0$ è radice semplice del polinomio caratteristico; inoltre esiste un intero positivo η, detto "indice di imprimitività di F", per cui*

- gli autovalori a modulo λ_0 sono tutti e soli i numeri complessi dati da

$$\lambda_0 e^{j\frac{2\pi k}{\eta}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \eta - 1 \ , \tag{11.57}$$

- l'intero spettro di F è invariante (molteplicità incluse) rispetto alla moltiplicazione per $e^{j\frac{2\pi}{\eta}}$;

iv) [Unicità dell'autovettore positivo e base di Jordan] $\mathbf{v}_0$ *è, a meno di un fattore di proporzionalità positivo, l'unico autovettore positivo della matrice F. Rispetto alla base di Jordan, ogni vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ha componente positiva su $\mathbf{v}_0$;*

v) [Monotonicità dell'autovalore dominante] *Se $\bar{F}$ è maggiore di F, ovvero $\bar{F} - F > 0$, il corrispondente autovalore positivo $\bar{\lambda}_0$ soddisfa la diseguaglianza $\bar{\lambda}_0 > \lambda_0$.*

Prova i) Per la proposizione 11.2.2, la matrice

$$\tilde{F} := \sum_{h=0}^{n-1} F^h$$

è strettamente positiva, quindi esistono un autovettore $\tilde{\mathbf{v}}_0 \gg \mathbf{0}$ e un autovalore $\mu_0 > 0$ soddisfacenti

$$\tilde{F}\tilde{\mathbf{v}}_0 = \mu_0 \tilde{\mathbf{v}}_0. \tag{11.58}$$

Essendo $\tilde{F}\tilde{\mathbf{v}}_0 = \tilde{\mathbf{v}}_0 + F\tilde{\mathbf{v}}_0 + \ldots + F^{n-1}\tilde{\mathbf{v}}_0 > \tilde{\mathbf{v}}_0$, l'autovalore μ_0 è maggiore di 1 ed esiste un unico numero positivo λ_0 per cui risulta

$$\mu_0 = 1 + \lambda_0 + \ldots + \lambda_0^{n-1}.$$

Se riscriviamo la (11.58) nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sum_{h=0}^{n-1} F^h \tilde{\mathbf{v}}_0 - \sum_{h=0}^{n-1} \lambda_0^h \tilde{\mathbf{v}}_0 \\ &= (F - \lambda_0 I)\tilde{\mathbf{v}}_0 + (F^2 - \lambda_0^2 I)\tilde{\mathbf{v}}_0 + \ldots (F^{n-1} - \lambda_0^{n-1} I)\tilde{\mathbf{v}}_0 \\ &= (F - \lambda_0 I)\left[I + (F + \lambda_0 I) + \ldots + (F^{n-2} + \lambda_0 F^{n-3} + \ldots + \lambda_0^{n-2} I)\right]\tilde{\mathbf{v}}_0 \end{aligned} \tag{11.59}$$

vediamo che $\mathbf{v}_0 := \left[I + (F + \lambda_0 I) + \ldots + (F^{n-2} + \lambda_0 F^{n-3} + \ldots + \lambda_0^{n-2} I)\right]\tilde{\mathbf{v}}_0 \gg \mathbf{0}$ è un autovettore strettamente positivo di F, corrispondente all'autovalore positivo λ_0.

ii) Poiché F^T è irriducibile, esistono un vettore $\mathbf{w}_0 \gg \mathbf{0}$ e un numero reale $\nu_0 > 0$ soddisfacenti $F^T\mathbf{w}_0 = \nu\mathbf{w}_0$, e procedendo come per il punto (ii) del teorema di Perron, si verifica l'uguaglianza $\nu_0 = \lambda_0$. Quindi $\mathbf{w}_0^T$ è autovettore sinistro di F relativo a λ_0, e da $F\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, segue

$$F|\mathbf{u}| \geq |F\mathbf{u}| = |\lambda \mathbf{u}| = |\lambda||\mathbf{u}| \quad \text{e} \quad \lambda_0 \mathbf{w}_0^T|\mathbf{u}| = \mathbf{w}_0^T F|\mathbf{u}| \geq |\lambda|\mathbf{w}_0^T|\mathbf{u}|.$$

Ciò implica $\lambda_0 \geq |\lambda|$.

iv) La prima parte è immediata: se $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ fosse un autovettore positivo di F non proporzionale a $\mathbf{v}_0$, sia $\mathbf{u}$ che $\mathbf{v}_0$ sarebbero autovettori della matrice strettamente positiva $\tilde{F} = \sum_{h=0}^{n-1} F^h$, contraddicendo il quarto punto del teorema di Perron.

iii) Se λ_0 avesse molteplicità algebrica maggiore di 1 come autovalore di F, si vede immediatamente (p.es. dalla forma di Jordan di F) che $1 + \lambda_0 + \ldots + \lambda_0^{n-1} = \mu_0$ sarebbe autovalore con molteplicità maggiore di 1 per la matrice $\tilde{F} = \sum_{h=0}^{n-1} F^h$, ancora una volta in contraddizione con il teorema di Perron.

Sia ora λ un autovalore "periferico" di F, soddisfacente cioè la condizione $\lambda = e^{j\phi}\lambda_0$, e sia $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ un autovettore corrispondente. Da $F\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ segue che in

$$F|\mathbf{u}| \geq |F\mathbf{u}| = |e^{j\bar{\phi}}\lambda_0 \mathbf{u}| = \lambda_0|\mathbf{u}| \tag{11.60}$$

non può valere il segno di diseguaglianza. Altrimenti otterremmo l'assurdo

$$\mathbf{w}_0^T \lambda_0|\mathbf{u}| = \mathbf{w}_0^T F|\mathbf{u}| > \lambda_0 \mathbf{w}_0^T|\mathbf{u}|$$

Quindi $|\mathbf{u}|$ è un autovettore positivo di F corrispondente all'autovalore λ_0 e per la prima parte del punto (iv) è proporzionale a $\mathbf{v}_0$.

Supponiamo ora che $e^{j\bar{\phi}}\lambda_0$ sia l'autovalore periferico a fase positiva minima e sia $\mathbf{u}^{(1)}$ l'autovettore corrispondente. Moltiplicando eventualmente $\mathbf{u}^{(1)}$ per una costante complessa non nulla, non è restrittivo supporre, che $|\mathbf{u}^{(1)}|$ e $\mathbf{v}_0$ coincidano

$$|\mathbf{u}^{(1)}| = \mathbf{v}_0 \tag{11.61}$$

e che coincidano altresì la prima componente di $\mathbf{u}^{(1)}$ e la prima componente di $\mathbf{v}_0$.

Esistono allora numeri complessi a modulo unitario $e^{j\phi_1} = 1, e^{j\phi_2}, \ldots, e^{j\phi_n}$ per cui risulta

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & e^{j\phi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j\phi_n} \end{bmatrix} \mathbf{v}_0 = D\mathbf{v}_0 \tag{11.62}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F\mathbf{u}^{(1)} &= e^{j\bar{\phi}}\lambda_0 \mathbf{u}^{(1)} \\ FD\mathbf{v}_0 &= e^{j\bar{\phi}}\lambda_0 D\mathbf{v}_0 \\ e^{-j\bar{\phi}}D^{-1}FD\mathbf{v}_0 &= \lambda_0 \mathbf{v}_0 \ = \ F\mathbf{v}_0 \\ \left[F - e^{-j\bar{\phi}}D^{-1}FD\right]\mathbf{v}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{11.63}$$

Nella matrice $F - e^{-j\bar{\phi}}D^{-1}FD$ l'elemento generico in posizione (h,k) ha struttura $f_{hk}(1 - e^{j\psi_{hk}})$, quindi la sua parte reale è positiva o nulla, ed è nulla solo nel caso in cui sia nullo $f_{hk}(1 - e^{j\psi_{hk}})$. Poiché $\mathbf{v}_0$ è strettamente positivo e la parte reale della matrice $F - e^{-j\bar{\phi}}D^{-1}FD$ è non negativa, (11.63) comporta che la parte reale della matrice sia nulla. Allora possiamo concludere che è nulla l'intera matrice, ossia

$$F = e^{-j\bar{\phi}}D^{-1}FD. \tag{11.64}$$

Il polinomio caratteristico di F coincide con quello della matrice simile $D^{-1}FD = e^{j\bar{\phi}}F$, quindi

$$\det(zI - e^{j\bar{\phi}}F) = \det(zI - F), \tag{11.65}$$

da cui segue che le radici del polinomio caratteristico di F sono invarianti (molteplicità inclusa) rispetto alla moltiplicazione per $e^{\pm j\bar{\phi}}$.
Di conseguenza:

- $\lambda_0 e^{jk\bar{\phi}}$ è autovalore di F per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e, come λ_0, è radice semplice del polinomio caratteristico;

- posto $\bar{\phi} = 2\alpha\pi$, il numero α deve essere razionale, altrimenti F avrebbe infiniti autovalori distinti, e della forma $\alpha = 1/\eta$, con η intero positivo opportuno, altrimenti non sarebbe soddisfatta l'ipotesi che la fase $\bar{\phi}$ sia la minima fra le fasi positive degli autovalori periferici (si veda il successivo Esercizio);

- gli autovalori periferici di F hanno tutti struttura

  $$\lambda_0 e^{jk\bar{\phi}}, \ k = 0, 1, \ldots, \eta - 1;$$

  se infatti $\lambda_0 e^{j\psi}$ appartiene allo spettro periferico di F, ad esso appartengono anche $\lambda_0 e^{j(\psi \pm k\bar{\phi})}$ per ogni intero $k > 0$, e se ψ non fosse multiplo intero di $\bar{\phi}$, uno fra gli autovalori periferici

  $$\lambda_0 e^{j\psi}, \lambda_0 e^{j(\psi \pm \bar{\phi})}, \lambda_0 e^{j(\psi \pm 2\bar{\phi})}, \ldots$$

  avrebbe fase positiva, ma minore di $\bar{\phi}$.

iv) Per la prova della seconda parte, relativa alle componenti di un vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ rispetto alla base di Jordan $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{n-1}$,

$$\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{v}_0 + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} \tag{11.66}$$

basta osservare, come per il teorema di Perron, che il prodotto $\mathbf{w}_0^T \mathbf{v}_i$ è nullo per ogni autovettore generalizzato $\mathbf{v}_i$ diverso da $\mathbf{v}_0$, mentre $\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}$ e $\mathbf{w}_0^T \mathbf{v}_0$ sono entrambi positivi.

v) Anche in questo caso, si utilizza l'esistenza di un autovettore sinistro $\mathbf{w}_0^T$ e di un autovettore destro $\mathbf{v}_0$ strettamente positivi, relativi all'autovalore λ_0 e si procede come nel caso delle matrici strettamente positive. ■

- Esercizio 11.5.1 Se $\bar{\phi} = \frac{p}{q} 2\pi$, con p e q coprimi e $p, q > 1$, allora esiste k per cui $e^{\frac{j2\pi p}{q} k} = e^{\frac{j2\pi}{q}}$.

  ♯ *Suggerimento: per la coprimalità di p e q, esistono interi k e h per cui è soddisfatta l'equazione diofantea $kp + hq = 1$. Inoltre k si può sempre supporre positivo. Quindi* $k\frac{p}{q} + h = \frac{1}{q}$

Corollario 11.5.2 *La matrice irriducibile $F > 0$ è primitiva se e solo se il suo indice di imprimitività η vale 1.*

Prova Se $\eta > 1$, F possiede più di un autovalore a modulo λ_0, quindi non può essere primitiva.
Viceversa, se $\eta = 1$, lo spettro periferico di F comprende solo l'autovalore di Perron λ_0,

che pertanto è dominante. Rappresentando i vettori canonici $\mathbf{e}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ sulla base di Jordan di F, da (11.66) si ottiene

$$\mathbf{e}_i = \alpha_0^{(i)}\mathbf{v}_0 + \alpha_1^{(i)}\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^{(i)}\mathbf{v}_{n-1}, \quad \alpha_0^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

e quindi

$$F^h\mathbf{e}_i = \lambda_0^h\left[\alpha_0^{(i)}\mathbf{v}_0 + \alpha_1^{(i)}\frac{F^h\mathbf{v}_1}{\lambda_0^h} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(i)}\frac{F^h\mathbf{v}_{n-1}}{\lambda_0^h}\right], \quad \alpha_0^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.67}$$

I termini $F^h\mathbf{v}_j/\lambda_0^h,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$, sono infinitesimi al divergere di h, poiché gli autovettori (generalizzati) $\mathbf{v}_j$ sono relativi ad autovalori con modulo minore di λ_0. Quindi per h abbastanza grande e per $i = 1, 2, \ldots, n$, i vettori $\alpha_0^{(i)}\mathbf{v}_0$, strettamente positivi e indipendenti da h, superano il modulo dei vettori (reali) $\alpha_1^{(i)}\frac{F^h\mathbf{v}_1}{\lambda_0^h} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(i)}\frac{F^h\mathbf{v}_{n-1}}{\lambda_0^h}$. Si può allora concludere che tutti i vettori $F^h\mathbf{e}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, sono strettamente positivi e la matrice F^h è strettamente positiva. ■

Un'interessante conseguenza di (11.62) è la possibilità di ottenere dall'autovettore $\mathbf{v}_0$ di Perron tutti gli autovettori corrispondenti agli autovalori periferici di una matrice irriducibile, sottoponendo le componenti di $\mathbf{v}_0$ alla moltiplicazione per opportune radici η-esime dell'unità.

Corollario 11.5.3 [Autovettori dello spettro periferico] *Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ una matrice positiva irriducibile con indice di imprimitività $\eta > 1$ e sia $\bar\phi = 2\pi/\eta$, in modo che le potenze di*

$$\theta = e^{j\bar\phi} := e^{j\frac{2\pi}{\eta}}$$

forniscano tutte le radici η-esime dell'unità. Se $\lambda_0 > 0$ e $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ sono rispettivamente l'autovalore positivo massimale e l'autovettore corrispondente,

i) esiste una matrice diagonale

$$D = \mathrm{diag}\{1, e^{j\phi_2}, \ldots, e^{j\phi_n}\} \tag{11.68}$$

tale che per ogni h

$$\mathbf{u}^{(h)} = D^h\mathbf{v}_0$$

è autovettore corrispondente all'autovalore periferico $\theta^h\lambda_0$;

ii) gli elementi diagonali di D appartengono al gruppo delle radici η-esime dell'unità e ogni radice η-esima dell'unità coincide con uno almeno degli elementi diagonali di D.

Prova Nella dimostrazione del teorema di Frobenius-Perron si è provata l'esistenza di una matrice diagonale D, avente la struttura specificata in (11.68), tale che

- $\mathbf{u}^{(1)} := D\mathbf{v}_0$ è autovettore corrispondente all'autovalore periferico $\theta\lambda_0$

$$F(D\mathbf{v}_0) = \theta\lambda_0(D\mathbf{v}_0). \tag{11.69}$$

- vale la (11.64), che per comodità riscriviamo nella forma

$$\theta DF = FD. \tag{11.70}$$

Se assumiamo induttivamente che il vettore $\mathbf{u}^{(h)} := D^h\mathbf{v}_0$ soddisfi la $F\mathbf{u}^{(h)} = \theta^h\lambda_0\mathbf{u}^{(h)}$, e quindi sia autovettore di F relativo all'autovalore $\theta^h\lambda_0$, allora il vettore $\mathbf{u}^{(h+1)} := D^{h+1}\mathbf{v}_0$ soddisfa

$$\begin{aligned}
F\mathbf{u}^{(h+1)} &= F[D^{h+1}\mathbf{v}_0] = [FD][D^h\mathbf{v}_0] = [\theta DF][D^h\mathbf{v}_0] \\
&= [\theta D][F(D^h\mathbf{v}_0)] = [\theta D][F\mathbf{u}^{(h)}] = [\theta D][\theta^h\lambda_0\mathbf{u}^{(h)}] = \theta^{h+1}\lambda_0[D^{h+1}\mathbf{v}_0] \\
&= \theta^{h+1}\lambda_0\mathbf{u}^{(h+1)},
\end{aligned} \tag{11.71}$$

che dimostra il punto (i).

Per il successivo punto (ii), osserviamo che $D^\eta\mathbf{v}_0$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ_0, quindi per il teorema di Frobenius-Perron è proporzionale a $\mathbf{v}_0$, ovvero $D^\eta\mathbf{v}_0 = \alpha\mathbf{v}_0$, e ciò implica

$$D^\eta = \alpha I_n = I_n, \tag{11.72}$$

atteso che il primo elemento della diagonale di D vale 1. Quindi tutti gli elementi diagonali di D sono radici η-esime dell'unità e le componenti di $\mathbf{u}^{(h)} = D^h\mathbf{v}_0$ differiscono da quelle di $\mathbf{v}_0$ per fattori che sono radici η-esime dell'unità.
Gli autovettori $\mathbf{u}^{(h)} = D^h\mathbf{v}_0,\ h = 0, 1, \ldots, \eta - 1$, essendo relativi ad autovalori distinti, sono linearmente indipendenti. Allora sono linearmente indipendenti le matrici diagonali $D^0 = I, D, D^2, \ldots, D^{\eta-1}$, e ciò è possibile solo se la diagonale di D contiene (almeno) η elementi distinti, quindi tutte le radici η-esime dell'unità. ■

11.5.2 Forma ciclica di Frobenius

Un'ulteriore conseguenza della formula (11.64), dimostrata nel teorema di Frobenius, riguarda la possibilità di ridurre per cogredienza una matrice irriducibile ad una struttura "ciclica" a blocchi, di cui discuteremo nel seguito alcune notevoli proprietà.

Corollario 11.5.4 [Forma ciclica di Frobenius di una matrice irriducibile] *Se F è irriducibile con indice di imprimitività $\eta > 1$, esiste una matrice di permutazione Π tale che*

$$\Pi^T F \Pi = \begin{bmatrix} 0 & \bar{F}_{1,2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_{2,3} & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{F}_{\eta-1,\eta} \\ \bar{F}_{\eta,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.73}$$

dove i blocchi nulli sulla diagonale principale sono matrici quadrate.

Prova Sia D la matrice diagonale (11.68), i cui elementi diagonali sono, per il corollario 11.5.3, tutte e sole le radici η-esime dell'unità. Sia Π una matrice di permutazione che riordina per cogredienza gli elementi diagonali di D in modo che lungo la diagonale si succedano prima tutti gli elementi unitari, in numero di ν_1, poi tutti gli elementi $\theta := e^{j\bar{\phi}}$,in numero di ν_2, poi tutti gli elementi θ^2, etc.

$$\bar{D} = \Pi^T D \Pi = \begin{bmatrix} I_{\nu_1} & & & & \\ & I_{\nu_2}\theta & & & \\ & & I_{\nu_3}\theta^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{\nu_\eta}\theta^{\eta-1} \end{bmatrix} \tag{11.74}$$

Partizioniamo in modo conforme la matrice

$$\bar{F} := \Pi^T F \Pi = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{13} & \dots & \bar{F}_{1\eta} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{23} & \dots & \bar{F}_{2\eta} \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & \bar{F}_{33} & \dots & \bar{F}_{3\eta} \\ & & \dots & & \\ \bar{F}_{\eta 1} & \bar{F}_{\eta 2} & \bar{F}_{\eta 3} & \dots & \bar{F}_{\eta\eta} \end{bmatrix} \tag{11.75}$$

e utilizziamo (11.64), (11.74) e (11.75) :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \Pi^T F \Pi = \Pi^T(\theta^{-1} D^{-1} F D)\Pi = \theta^{-1}(\Pi^T D^{-1}\Pi)(\Pi^T F \Pi)(\Pi^T D \Pi) = \theta^{-1}\bar{D}^{-1}\bar{F}\bar{D} \\ &= \begin{bmatrix} \theta^{-1}\bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \theta\bar{F}_{13} & \dots & \theta^{\eta-2}\bar{F}_{1\eta} \\ \theta^{-2}\bar{F}_{21} & \theta^{-1}\bar{F}_{22} & \bar{F}_{23} & \dots & \theta^{\eta-3}\bar{F}_{2\eta} \\ \theta^{-3}\bar{F}_{31} & \theta^{-2}\bar{F}_{32} & \theta^{-1}\bar{F}_{33} & \dots & \theta^{\eta-4}\bar{F}_{3\eta} \\ & & \dots & & \\ \bar{F}_{\eta 1} & \theta\bar{F}_{\eta 2} & \theta^2\bar{F}_{\eta 3} & \dots & \theta^{\eta-1}\bar{F}_{\eta\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.76}$$

Confrontando (11.75) con (11.76) si ha subito che i tutti i blocchi di $\bar{F}$ moltiplicati per potenze di θ diverse da θ^0 sono nulli: quindi $\bar{F}$ è in forma ciclica di Frobenius. ■

- Esercizio 11.5.2 [Potenze della forma ciclica] Sia $\bar{F}$ la forma ciclica di Frobenius (11.73) di una matrice irriducibile F con indice di imprimitività $\eta > 1$ e autovalore massimale λ_0. Allora

  (i) i blocchi diagonali sono diversi da zero solo in corrispondenza alle potenze $\bar{F}^\eta, \bar{F}^{2\eta}, \dots$;

  (ii) $\bar{F}^\eta$ è diagonale a blocchi, con blocchi diagonali (quadrati!)

  $$\bar{F}_{1,2}\bar{F}_{2,3}\cdots\bar{F}_{\eta,1}\ , \quad \bar{F}_{2,3}\bar{F}_{3,4}\cdots\bar{F}_{1,2}\ , \quad \dots\ , \quad \bar{F}_{\eta,1}\bar{F}_{1,2}\cdots\bar{F}_{\eta-1,\eta};$$

  (iii) tutti i blocchi diagonali del punto (ii) sono matrici irriducibili;

  (iv*) tutti i blocchi diagonali del punto (ii) sono matrici primitive.

  ♯ *Suggerimento. (iii) Se i blocchi diagonali non fossero tutti irriducibili, in qualche posizione* (r, s) *essi, e quindi tutte le potenze di* $\bar{F}$, *avrebbero un elemento nullo.*

  (iv) Siano $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *e* $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$. *Applicando un procedimento già impiegato nel paragrafo 6.4, da*

  $$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} zI_p & A \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -A \\ -B & zI_q \end{bmatrix}\right) &= \det\begin{bmatrix} zI_p - AB & 0 \\ -B & zI_q \end{bmatrix} = z^q \det(zI_p - AB) \\ \det\left(\begin{bmatrix} I_p & -A \\ -B & zI_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} zI_p & A \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\right) &= \det\begin{bmatrix} zI_p & 0 \\ -Bz & zI_q - BA \end{bmatrix} = z^p \det(zI_q - BA). \end{aligned}$$

segue immediatamente

$$z^q \det(zI_p - AB) = z^p \det(zI_q - BA).$$

Il risultato viene poi esteso alle permutazioni cicliche del prodotto $A_1A_2\cdots A_r$ di r matrici, con A_1 di dimensioni $p\times\nu_1$, A_2 di dimensioni $\nu_1\times\nu_2$, ..., A_r di dimensioni $\nu_{r-1}\times p$.
Gli η blocchi diagonali irriducibili del punto (ii) hanno allora i medesimi autovalori non nulli, quindi, in particolare, il medesimo autovalore di Perron-Frobenius, coincidente con λ_0^η. Se qualcuno di essi non fosse primitivo, avrebbe anche qualche altro autovalore periferico, del tipo $\lambda_0^\eta e^{j\phi}$, $\phi\in(0,2\pi)$, quindi in $\bar F^\eta$ il numero di autovalori con modulo λ_0^η sarebbe maggiore di η e $\bar F$ avrebbe un numero di autovalori a modulo λ_0 maggiore dell'indice di imprimitività.

Con riferimento alla base "permutata", in cui vale la forma ciclica di Frobenius, un vettore viene trasformato da $\bar F$ come segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\eta-1} \\ \mathbf{x}_\eta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \bar F_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \bar F_{2,3} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar F_{\eta-1,\eta} \\ \bar F_{\eta,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\eta-1} \\ \mathbf{x}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar F_{1,2}\mathbf{x}_2 \\ \bar F_{2,3}\mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \bar F_{\eta-1,\eta}\mathbf{x}_\eta \\ \bar F_{\eta,1}\mathbf{x}_1 \end{bmatrix}.$$

L'applicazione di $\bar F$ opera sulle componenti del secondo blocco del vettore $\mathbf{x}$ trasformandole in componenti del primo, ..., sulle componenti dell'ultimo blocco trasformandole in componenti del penultimo, su quelle del primo blocco trasformandole in componenti dell'ultimo.
Inoltre, come conseguenza della primitività dei blocchi diagonali di $\bar F^\eta$ (cfr Esercizio 11.5.1), la matrice diagonale a blocchi $F^{t\eta}$ per t abbastanza grande ha blocchi diagonali strettamente positivi, quindi il vettore $\bar F^{t\eta}\mathbf{x}$ è costituito soltanto da blocchi strettamente positivi e da blocchi nulli, a seconda che i blocchi omologhi di $\mathbf{x}$ siano o non siano diversi da zero. Infine, per $k\ge t\eta$, blocchi strettamente positivi e blocchi nulli si spostano ciclicamente, sulle η posizioni:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ + \\ + \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ + \\ + \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} + \\ + \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ + \\ + \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} + \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ + \\ + \\ \mathbf{0} \\ + \end{bmatrix} \mapsto \dots$$

L'invarianza delle radici del polinomio caratteristico di una matrice irriducibile rispetto alla moltiplicazione per $e^{j\bar\phi}$, espressa da (11.65), implica che, in corrispondenza ad ogni autovalore non nullo $\lambda\in\Lambda(F)$, i numeri

$$\lambda, \lambda e^{j\bar\phi}, \lambda e^{j2\bar\phi}, \dots, \lambda e^{j(\eta-1)\bar\phi}. \tag{11.77}$$

sono autovalori di F, con la medesima molteplicità di λ, Il seguente corollario 11.5.5 è allora conseguenza dell'identità

$$z^\eta - \lambda^\eta = (z-\lambda)(z-\lambda e^{j\bar\phi})\cdots(z-\lambda e^{j(\eta-1)\bar\phi}). \tag{11.78}$$

Corollario 11.5.5 [Caratterizzazioni dell'indice di imprimitività] *Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ una matrice positiva irriducibile, con grafo di influenza $\mathcal{G}$, e sia*

$$\det(zI - F) = c_{n_0}z^{n_0} + c_{n_1}z^{n_1} + \ldots + c_{n_{k-2}}z^{n_{k-2}} + c_{n_{k-1}}z^{n_{k-1}} + z^n \tag{11.79}$$

il suo polinomio caratteristico, con

$$n_0 < n_1 < \ldots < n_{k-2} < n_{k-1} < n_k = n \quad e \quad c_{n_i} \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots, k-1, k.$$

Allora coincidono

(i) il numero degli autovalori periferici (i.e. l'indice di imprimitività η),

(ii) il massimo comune divisore delle differenze di grado $n_i - n_{i-1}$

$$\text{MCD}\{n_1 - n_0\ ,\ n_2 - n_1\ ,\ \ldots\ ,\ n_{k-1} - n_{k-2}\ ,\ n_k - n_{k-1}\}. \tag{11.80}$$

(iii) il massimo comun divisore delle lunghezze dei cicli di $\mathcal{G}$,

Prova Sia η l'indice di imprimitività di F.
In corrispondenza a ciascun autovalore $\lambda \neq 0$ lo spettro di F comprende gli elementi di (11.77), tutti con la medesima molteplicità di λ. Per ciascuna η-upla di autovalori non nulli, con il medesimo modulo e con fase come in (11.77), si possono raggruppare i corrispondenti fattori del polinomio caratteristico, ottenendo la fattorizzazione

$$\det(zI_n - F) = z^{n_0}(z^\eta - \lambda_0^\eta)(z^\eta - \lambda_1^\eta)(z^\eta - \lambda_2^\eta)\ldots.$$

Quindi il polinomio caratteristico è il prodotto di z^{n_0} per un polinomio in z^η e l'indice di imprimitività η è divisore comune delle differenze $n_1-n_0, n_2-n_1, \ldots, n_{k-1}-n_{k-2}, n-n_{k-1}$. È poi evidente che η rappresenta il divisore comune massimo di tali differenze, altrimenti l'insieme degli zeri del polinomio (11.78) sarebbe invariante per rotazioni intorno all'origine del piano complesso di ampiezza inferiore a $\bar\phi = \frac{2\pi}{\eta}$, il che non vale per lo spettro periferico di F. Quindi η coincide con il MCD dato da (11.80).

Ogni ciclo di $\mathcal{G}$ ha lunghezza multipla di η. Infatti, riferendoci alla partizione dei vertici che dà luogo alla forma ciclica di Frobenius $\bar F$, è chiaro che ogni cammino del grafo ha inizio in un vertice appartenente a uno degli η sottoinsiemi della partizione, e può rivisitare il sottoinsieme (e quindi il vertice di inizio) soltanto dopo aver compiuto un numero di passi multiplo di η. Quindi il MCD $\mathfrak{z}$ delle lunghezze dei cicli di $\mathcal{G}$ è un multiplo di η. D'altra parte, si è visto che, come conseguenza dell'Esercizio 11.5.1, se t è abbastanza grande, $\bar F^{t\eta}$ ha diagonale strettamente positiva, quindi per ogni i risulta $[\bar F^{t\eta}]_{ii} > 0$ e $[\bar F^{(t+1)\eta}]_{ii} > 0$, e $\mathfrak{z}$ deve dividere sia $t\eta$ che $(t+1)\eta$. Perciò $\mathfrak{z}$ coincide con η. ■

Esempio 11.5.1 [Onde di popolazione nel modello a classi di età] Nell'ipotesi che i tassi di sopravvivenza β_i siano tutti positivi, la matrice di Leslie (11.55) è irriducibile se e solo se $\alpha_n > 0$. Sviluppando il determinante di $zI-F$ secondo l'ultima colonna, si vede che il polinomio caratteristico soddisfa la relazione

$$\det\begin{bmatrix} z-\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ -\beta_1 & z & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & z & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\beta_{n-1} & z \end{bmatrix} = -\beta_1\cdots\beta_{n-1}\alpha_n + z\det\begin{bmatrix} z-\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & \ldots & -\alpha_{n-1} \\ -\beta_1 & z & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & z & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & -\beta_{n-2} & z \end{bmatrix}$$

e può quindi essere espresso nella forma

$$\det(zI_n - F) = -(\alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i) - (\alpha_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \beta_i) z - (\alpha_{n-2} \prod_{i=1}^{n-3} \beta_i) z^2 - \ldots - (\alpha_2 \beta_1) z^{n-2} - \alpha_1 z^{n-1} + z^n.$$

Se ricordiamo che, per ipotesi, α_n e tutti i β_i sono positivi e se indichiamo con

$$\alpha_{\nu_1} > 0,\ \alpha_{\nu_2} > 0,\ \ldots,\ \alpha_{\nu_k} > 0, \qquad \text{con} \quad \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k = n$$

i tassi di natalità positivi, possiamo riscrivere il polinomio caratteristico ponendo $\bar{\alpha}_{\nu_h} = \alpha_{\nu_h} \prod_{i=1}^{\nu_h - 1} \beta_i$

$$\det(zI_n - F) \quad = \quad -\bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{\nu_{k-1}} z^{n-\nu_{k-1}} - \ldots - \bar{\alpha}_{\nu_2} z^{n-\nu_2} - \bar{\alpha}_{\nu_1} z^{n-\nu_1} + z^n$$

Per il corollario 11.5.5, l'indice di imprimitività di F si può calcolare a partire dai gradi dei monomi non nulli di $\det(zI_n - F)$

$$\begin{aligned} \eta &= \text{M.C.D.}\{n - (n - \nu_1)\ ,\ (n - \nu_1) - (n - \nu_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (n - \nu_{k-1}) - (n - \nu_k)\} \\ &= \text{M.C.D.}\{\nu_1\ ,\ \nu_2 - \nu_1\ ,\ \nu_3 - \nu_2\ ,\ \ldots\ ,\ \nu_k - \nu_{k-1}\} \\ &= \text{M.C.D.}\{\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \ldots,\ \nu_k\} \end{aligned} \tag{11.81}$$

e la matrice di Leslie è primitiva se e solo (11.81) è unitario.
Quando l'indice di imprimitività η di F è maggiore di 1, si innescano "onde di popolazione", ovvero distribuzioni di popolazione periodiche (se $\lambda_0 = 1$) o pseudoperiodiche.
Se $\mathbf{v}_0$ è l'autovettore di Perron, poniamo $\theta := e^{j2\pi/\eta}$ e denotiamo con $\mathbf{u}^{(h)} = D^h \mathbf{v}_0$, $h = 0, 1, \ldots, \eta-1$, gli autovettori corrispondenti agli autovalori periferici $\theta^h \lambda_0$. Gli altri autovettori e autovettori generalizzati $\mathbf{u}^{(h)}$, $h = \eta, \eta+1, \ldots, n-1$, della base di Jordan sono relativi ad autovalori a modulo minore di λ_0.
Qualsiasi sia la popolazione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)} + \sum_{k=\eta}^{n} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)}$, la popolazione $\mathbf{x}(t)$ al divergere del tempo soddisfa

$$\frac{\mathbf{x}(t)}{\lambda_0^t} \simeq \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)} \theta^{ht}.$$

Poichè risulta $\theta^{ht} = \theta^{ht+\nu\eta}$ per ogni intero ν, se t è sufficientemente grande si ha

$$\frac{\mathbf{x}(t+\eta)}{\lambda_0^{t+\eta}} \simeq \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)} \theta^{ht} \simeq \frac{\mathbf{x}(t)}{\lambda_0^t}$$

e quindi $\mathbf{x}(t+\eta) \simeq \lambda_0^\eta \mathbf{x}(t)$.
Sempre per grandi valori di t, in ciascun pseudoperiodo di durata η i vettori di stato descritti dalla popolazione sono proporzionali ai vettori

$$\sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)},\quad \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)} \theta^h,\quad \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)} \theta^{2h},\quad \ldots,\quad \sum_{h=0}^{\eta-1} \alpha_h \mathbf{u}^{(h)} \theta^{(\eta-1)h},$$

quindi la distribuzione della popolazione nelle n classi di età ritorna ciclicamente (ogni η istanti) nella medesima configurazione. D'altra parte il livello della popolazione complessiva (i.e. la somma degli individui presenti nelle n classi di età) si accresce in un periodo secondo un fattore pari λ_0^η.
Si noti che, sebbene il vettore di popolazione e il livello complessivo di popolazione dopo un periodo siano pari a λ_0^η volte il vettore e il livello raggiunti all'inizio del periodo, non è vero che in un passo il vettore o il livello di popolazione si accrescano di un fattore pari a λ_0 rispetto a quelli del passo precedente.

11.5.3 Ulteriori proprietà dell'autovalore massimale

Abbiamo visto che l'autovalore λ_0 è il *raggio spettrale* $\rho(F)$ della matrice F, ossia il raggio del più piccolo cerchio con centro nell'origine di $\mathbb{C}$ in grado di contenere lo spettro $\Lambda(F)$. Esso può essere visto anche come l'elemento di separazione fra le due regioni $[0, \lambda_0)$ e $(\lambda_0, +\infty)$ dell'asse $\mathbb{R}_+$. Verificheremo che in ciascuna delle due regioni

- la “matrice risolvente” $(\lambda I - F)^{-1}$ ha proprietà di segno diverse;
- il vettore trasformato $F\mathbf{x}$ di un vettore positivo $\mathbf{x}$ può maggiorare (risp. essere maggiorato da) tutte le componenti di $\lambda\mathbf{x}$.

Nella discussione utilizzeremo (la versione matriciale di) un risultato di C.Neumann.
Se $M = [m_{i,j}]$ è una matrice in $\mathbb{C}^{n\times n}$, indichiamo con $|M|$ la matrice non negativa $[|m_{i,j}|]$ i cui elementi sono i moduli degli elementi di M, e diciamo che una serie di matrici complesse $\sum_{i=0}^{\infty} M_i$ converge assolutamente se la serie di matrici non negative $\sum_{i=0}^{\infty} |M_i|$ converge componente per componente.

Lemma 11.5.6 [Risolvente e serie di C.Neumann] *Se $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\rho(F) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \Lambda(F)\}$, allora per ogni numero complesso λ con $|\lambda| > \rho(F)$ la serie (di Neumann)*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^i}{\lambda^{i+1}} \tag{11.82}$$

converge assolutamente e la sua somma è $(\lambda I_n - F)^{-1}$, la matrice “risolvente di F”.

Prova Se M e N appartengono a $\mathbb{C}^{n\times n}$, vale la diseguaglianza $|MN| \leq |M||N|$.
Verifichiamo dapprima che, se $\rho(F) < 1$, allora la serie $I_n + |F| + |F^2| + \dots$ converge. Infatti i modi del sistema[11] $\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t)$ sono convergenti, quindi, fissato un numero positivo $\epsilon < 1/n$, esiste un esponente k per cui tutti gli elementi di F^k sono in modulo minori di ϵ e dalla precedente diseguaglianza segue

$$\begin{aligned}
|F^k| &< \epsilon\left(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right), \\
|F^{2k}| \leq |F^k||F^k| &< \epsilon^2 n\left(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right) = \frac{1}{n}(\epsilon n)^2\left(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right) \\
\dots &\quad \dots \\
|F^{\nu k}| \leq |F^k||F^{(\nu-1)k}| &< \epsilon^\nu n^{\nu-1}\left(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right) = \frac{1}{n}(\epsilon n)^\nu\left(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right).
\end{aligned}$$

Ma allora si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}|F^i| &\leq (I_n + |F| + \dots + |F^{k-1}|)\sum_{\nu=0}^{\infty}|F^{\nu k}| \\
&\leq (I_n + |F| + \dots + |F^{k-1}|)\Big[I_n + \frac{\epsilon n}{n}\left(1 + \epsilon n + (\epsilon n)^2 + \dots\right)\left(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right)\Big]
\end{aligned}$$

e la convergenza della serie $\sum_{i=0}^{\infty}|F^i|$ consegue della condizione $\epsilon n < 1$. È ovvio che, per ogni coppia di indici (r,s), nella serie $\sum_{i=0}^{\infty} F^i$ gli elementi in posizione (r,s) convergono assolutamente, quindi convergono.
Supponiamo ora che il raggio spettrale di F abbia un generico valore non negativo e che λ sia un numero complesso tale che $|\lambda| > \rho(F)$. Il raggio spettrale di F/λ è minore di 1, quindi la serie $\sum_{i=0}^{\infty}(F/\lambda)^i$ converge assolutamente. D'altra parte risulta

$$I_n = (I_n - \frac{F}{\lambda})\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{F}{\lambda}\right)^i = (\lambda I_n - F)\lambda^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{F}{\lambda}\right)^i = (\lambda I_n - F)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F^i}{\lambda^{i+1}},$$

quindi la somma della serie (11.82) fornisce $(\lambda I_n - F)^{-1}$. ■

[11]Il fatto che il sistema evolva sul campo complesso non modifica le conclusioni circa la convergenza dei modi.

Proposizione 11.5.7 [PROPRIETÀ ESTREMALI DELL'AUTOVALORE λ_0] *Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ una matrice irriducibile e sia $\lambda_0 > 0$ il suo autovalore di Perron-Frobenius. Allora*

i) se $\lambda > \lambda_0$ la matrice $(\lambda I_n - F)^{-1}$ è strettamente positiva;
se $0 \leq \lambda < \lambda_0$ la matrice $(\lambda I_n - F)^{-1}$, ove esista, contiene qualche elemento negativo;

ii) se $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$, la condizione $F\mathbf{x} > \lambda\mathbf{x}$ implica $\lambda_0 > \lambda$
la condizione $F\mathbf{x} < \lambda\mathbf{x}$ implica $\lambda_0 < \lambda$.

iii) λ_0 si può caratterizzare come

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : F\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{x}, \text{ per qualche } \mathbf{x} > \mathbf{0}\} &\quad (11.83)\\ &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : F\mathbf{x} \leq \lambda\mathbf{x}, \text{ per qualche } \mathbf{x} > \mathbf{0}\} &\quad (11.84)\end{aligned}$$

PROVA i) Se $\lambda > \lambda_0$, la serie di C.Neumann converge e si ha

$$(\lambda I - F)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^i}{\lambda^{i+1}}.$$

Quindi $(\lambda I - F)^{-1}$ è positiva in quanto limite di somme di matrici positive. Inoltre, per l'irriducibilità di F è strettamente positiva la somma parziale $\sum_{i=0}^{n-1} F^i\lambda^{-i-1}$, quindi anche la somma della serie.
Se $0 \leq \lambda < \lambda_0$ e $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ è l'autovettore di Perron-Frobenius corrispondente a λ_0, da $F\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0 \gg \lambda\mathbf{v}_0$ segue $\mathbf{n} := (\lambda I_n - F)\mathbf{v}_0 \ll \mathbf{0}$. Poiché il prodotto $(\lambda I_n - F)^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{v}_0$ è strettamente positivo, la matrice $(\lambda I_n - F)^{-1}$ deve contenere almeno un elemento negativo in ogni sua riga.
ii) Se $\mathbf{w}_0^T \gg \mathbf{0}^T$ è l'autovettore sinistro di Perron-Frobenius, $F\mathbf{x} > \lambda\mathbf{x}$ implica

$$\lambda_0\mathbf{w}_0^T\mathbf{x} = \mathbf{w}_0^T F\mathbf{x} > \mathbf{w}_0^T\lambda\mathbf{x} \tag{11.85}$$

e quindi $\lambda_0 > \lambda$. Analogamente si verifica che $F\mathbf{x} < \lambda\mathbf{x}$ implica $\lambda_0 < \lambda$.
iii) Risultando $F\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0$, chiaramente $\lambda_0 \in \{\lambda : F\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{x} \text{ per qualche } \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Quindi

$$\lambda_0 \leq \sup\{\lambda : F\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{x} \text{ per qualche } \mathbf{x} > \mathbf{0}\}. \tag{11.86}$$

Se nella diseguaglianza (11.86) valesse il segno "<", esisterebbero $\tilde{\lambda} > \lambda_0$ e $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ per cui si avrebbe $F\mathbf{x} \geq \tilde{\lambda}\mathbf{x}$ e quindi[12] $F\mathbf{x} > \tilde{\lambda}\mathbf{x}$, in contraddizione con il punto (ii). Ciò dimostra (11.83). La (11.84) si dimostra in modo analogo, ricorrendo alla condizione $F\mathbf{x} < \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \lambda_0 < \lambda$ del punto (ii). ■

Corollario 11.5.8 [CARATTERIZZAZIONE MAX-MIN DI λ_0 E $\mathbf{v}_0$] *Se F è irriducibile, e se $\lambda_0 > 0$ e $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ sono l'autovalore e l'autovettore di Perron-Frobenius di F, allora*

$$\max_{\mathbf{x}\gg\mathbf{0}}\left(\min_i \frac{(F\mathbf{x})_i}{x_i}\right) = \lambda_0 = \min_{\mathbf{x}\gg\mathbf{0}}\left(\max_i \frac{(F\mathbf{x})_i}{x_i}\right) \tag{11.87}$$

e il valore λ_0 viene raggiunto soltanto se $\mathbf{x}$ è proporzionale a $\mathbf{v}_0$.

[12] $F\mathbf{x} = \tilde{\lambda}\mathbf{x}$ non è ammissibile, altrimenti λ_0 non sarebbe l'autovalore di Perron.

PROVA Sia $\mathbf{x}$ un arbitrario vettore strettamente positivo e sia $\min_i \frac{(F\mathbf{x})_i}{x_i} = \tilde{\lambda}$. Risulta allora, per $i = 1, 2, \ldots, n$, $(F\mathbf{x})_i \geq \tilde{\lambda} x_i$, $\forall i$, e quindi $F\mathbf{x} \geq \tilde{\lambda}\mathbf{x}$. Di conseguenza

$$\tilde{\lambda} \in \{\lambda : F\mathbf{x} \geq \lambda \mathbf{x} \text{ per qualche } \mathbf{x} > \mathbf{0}\},$$

e ciò implica, attesa la (11.83), $\tilde{\lambda} \leq \lambda_0$. D'altra parte, scegliendo $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0$ si ha $\frac{(F\mathbf{x})_i}{x_i} = \lambda_0$ per ogni i. Quindi l'eguaglianza di sinistra in (11.87) è verificata, scegliendo $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0$.
Se un vettore $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ soddisfacesse $\min_i \frac{(F\mathbf{x})_i}{x_i} = \lambda_0$ ma il valore minimo non fosse raggiunto per tutti i valori dell'indice i, si avrebbe $F\mathbf{x} > \lambda_0\mathbf{x}$, e per il punto (ii) delle proposizione 11.5.7 si otterrebbe l'assurdo $\lambda_0 > \lambda_0$. Quindi nell'eguaglianza di sinistra di (11.87) il massimo si raggiunge soltanto in corrispondenza all'autovettore $\mathbf{v}_0$.
L'eguaglianza di destra si prova in modo analogo. ■

- **Esempio 11.5.2** [CONTROLLO DI POTENZA IN UNA RETE DI TRASMISSIONE] Si consideri una rete costituita da $n \geq 2$ trasmettitori $T_1, T_2, \ldots, T_n$ con livelli di potenza positivi $p_1, p_2, \ldots p_n > 0$, che trasmettono a n ricevitori $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Il generico trasmettitore T_i è in comunicazione soltanto con il ricevitore R_i, ma quest'ultimo riceve segnale (indesiderato!) anche dagli altri trasmettitori.

Per ogni i e j, indichiamo con $g_{ij} > 0$ il guadagno dal trasmettitore T_j al ricevitore R_i.
Allora il livello di potenza $\mathcal{S}_i$ del segnale "utile" ricevuto dal ricevitore R_i da parte del trasmettitore T_i con cui comunica è $g_{ii}p_i$, mentre il livello di potenza del segnale di interferenza captato da R_i e dovuto al trasmettitore $T_k, k \neq i$ è dato da $g_{ik}p_k$.
Complessivamente, il segnale di interferenza sul ricevitore R_i ha un livello di potenza $\mathcal{I}_i = \sum_{k \neq i} g_{ik}p_k$ e il rapporto fra la potenza del segnale utile e quella del segnale di interferenza è dato da

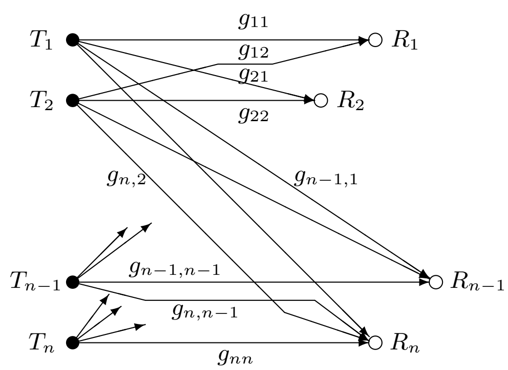

Figura 11.5.1

$$\frac{\mathcal{S}_i}{\mathcal{I}_i} = \frac{g_{ii}p_i}{\sum_{k \neq i} g_{ik}p_k} \tag{11.88}$$

Per un'assegnata matrice $G = [g_{ij}]$ dei guadagni, il rapporto $\mathcal{S}_i/\mathcal{I}_i$ dipende dal vettore $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{bmatrix}^T$ ma rimane invariato se il vettore viene moltiplicato per una arbitraria costante positiva. La situazione più critica si verificherà in corrispondenza al ricevitore R_i per il quale risulta minimo il rapporto $\mathcal{S}_i/\mathcal{I}_i$. Tale valor minimo, $\min_i \dfrac{\mathcal{S}_i}{\mathcal{I}_i}$, viene denotato con l'acronimo SIR[13] e il problema che intendiamo affrontare è quello di determinare il vettore delle potenze $\mathbf{p}$ in modo da rendere SIR il più elevato possibile

$$\max_{\mathbf{p} \gg \mathbf{0}} \left(\min_i \frac{\mathcal{S}_i}{\mathcal{I}_i} \right). \tag{11.89}$$

A tale scopo, introduciamo la matrice positiva irriducibile $\hat{G} = [\hat{g}_{ij}] = (\text{diag}G)^{-1}(G - \text{diag}G)$ con

$$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{g_{ij}}{g_{ii}} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

[13] Signal to Interference Ratio

e osserviamo che risolvere in $\mathbf{p}$ il problema (11.89) equivale a minimizzare, rispetto a $\mathbf{p}$, il valore massimo dei rapporti inversi $\frac{\mathcal{I}_i}{\mathcal{S}_i}$. Il problema si riduce allora al seguente

$$\min_{\mathbf{p}\gg\mathbf{0}} \left(\max_i \frac{\mathcal{I}_i}{\mathcal{S}_i} \right) = \min_{\mathbf{p}\gg\mathbf{0}} \left(\max_i \frac{(\hat{G}\mathbf{p})_i}{p_i} \right). \tag{11.90}$$

Per il corollario 11.5.8, i livelli di potenza ottimali sono quelli proporzionali alle componenti del vettore di Perron $\mathbf{v}_0$ di $\hat{G}$. In corrispondenza a tali livelli, il valore massimo dei rapporti inversi è minimo e vale λ_0, l'autovalore di Perron di $\hat{G}$. Quindi $1/\lambda_0$ fornisce il valore massimo del SIR.

- Esercizio 11.5.3* [Derivata di un determinante] Se $M(z) = [m_{ij}(z)]$ è una matrice $n \times n$ i cui elementi $m_{ij}(z)$ sono funzioni derivabili della variabile reale z, allora

$$\frac{d}{dz} \det M(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\mathrm{adj} M(z)]_{ij} \frac{dm_{ij}(z)}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \det M^{(i)}(z) \tag{11.91}$$

dove $M^{(i)}(z)$ è la matrice ottenuta da $M(z)$ sostituendo nella riga i-esima gli elementi $m_{ij}(z)$ con le rispettive derivate $\frac{dm_{ij}(z)}{dz}$, per $j = 1, 2, \dots, n$.

♯ *Suggerimento: si applichi la regola di derivazione delle funzioni composte:* $\det M$ *dipende dalle* n^2 *variabili* $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{nn}$, *ciascuna delle quali è a sua volta funzione di* z.
La dipendenza di $\det M$ *dalla variabile* m_{ij} *si ricava dalla formula*

$$\det M = m_{i1}[\mathrm{adj} M]_{i1} + \dots + m_{ij}[\mathrm{adj} M]_{ij} + \dots + m_{in}[\mathrm{adj} M]_{in},$$

nella quale $[\mathrm{adj} M]_{i1}, \dots [\mathrm{adj} M]_{in}$ *non dipendono da* m_{ij} *e quindi* $\frac{\partial \det M}{\partial m_{ij}} = [\mathrm{adj} M]_{ij}$. *Da ciò segue*

$$\frac{d}{dz} \det M(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \det M}{\partial m_{ij}} \frac{dm_{ij}}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\mathrm{adj} M]_{ij} \frac{dm_{ij}}{dz}.$$

- Esercizio 11.5.4* [Comportamento di $\Delta_F(z)$ e di $\mathrm{adj}(zI - F)$] Se $F > 0$ è una matrice irriducibile con autovalore massimale positivo λ_0, allora
(i) sul semiasse reale positivo la funzione polinomiale $\Delta_F(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : z \mapsto \Delta_F(z)$ ha derivata positiva per ogni numero reale $z \geq \lambda_0$;
(ii) la matrice $\mathrm{adj}(zI - F)$ è strettamente positiva per ogni numero reale $z \geq \lambda_0$.

♯ *Soluzione. (i) Si fattorizzi sul campo reale il polinomio caratteristico di* F. *Se* $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ *sono le sue radici reali e* $\mu_1, \breve{\mu}_1, \mu_2, \breve{\mu}_2, \dots \mu_s, \breve{\mu}_s$ *le radici complesse coniugate*

$$\Delta_F(z) = (z - \lambda_0)(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_r)\Big(z^2 - (\mu_1 + \breve{\mu}_1)z + \mu_1\breve{\mu}_1\Big) \dots \Big(z^2 - (\mu_s + \breve{\mu}_s)z + \mu_s\breve{\mu}_s\Big)$$

si ha $\lambda_i < \lambda_0,\ i = 1, \dots, r$, *e* $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\mu_j < \lambda_0,\ j = 1, \dots, s$. *Quindi, per ogni* $z \geq \lambda_0$, *sia i fattori lineari* $z - \lambda_i\ i = 1, \dots, r$, *e le loro derivate (rispetto a* z*), sia i fattori quadratici* $z^2 - (\mu_j + \breve{\mu}_j)z + \mu_j\breve{\mu}_j$ *e le loro derivate* $2z - (\mu_j + \breve{\mu}_j)$ *sono positivi.*

Perciò l'espressione della derivata

$$\frac{d\Delta_F(z)}{dz} = \frac{\Delta_F(z)}{z - \lambda_0} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\Delta_F(z)}{z - \lambda_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\Delta_F(z)(2z - \mu_j - \breve{\mu}_j)}{z^2 + (\mu_j + \breve{\mu}_j)z + \mu_j\breve{\mu}_j}$$

per $z > \lambda_0$ *consta di addendi tutti positivi, mentre per* $z = \lambda_0$ *ha positivo il primo addendo e nulli gli altri. Ne consegue che per* $z \geq \lambda_0$ *la funzione polinomiale* $\Delta_F(z)$ *è strettamente crescente.*

(ii) Dall'identità $(zI - F)\mathrm{adj}(zI - F) = \Delta_F(z)I_n$ *si ottiene* $(\lambda_0 I - F)\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F) = 0$, *quindi ogni colonna non nulla di* $\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)$ *è un autovettore di* F *relativo all'autovalore* λ_0.
Poiché l'autospazio di λ_0 *ha dimensione 1, il rango della matrice* $\lambda_0 I - F$ *è* $n - 1$, *quindi esiste*

almeno un minore di ordine $n-1$ non nullo e la matrice aggiunta ha un elemento diverso da 0. Allora almeno una colonna $\mathrm{col}_j \mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)$ *è autovettore di* λ_0*, e pertanto è strettamente positiva o strettamente negativa. Lo stesso ragionamento vale per la matrice* F^T*, anch'essa irriducibile con autovalore massimale* λ_0*. Da* $\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F^T) = \mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)^T$ *segue che* $\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)$ *ha una riga, p.e. la* i*-esima, strettamente positiva o strettamente negativa. Quindi le colonne di* $\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)$ *sono vettori tutti strettamente positivi o tutti strettamente negativi, proporzionali all'autovettore* $\mathbf{v}_0$*. Infine, applicando (11.91) a* $M(z) = zI - F$ *si ha* $dm_{ij}(z)/dz = 1$ *se* $i = j$ *e* $dm_{ij}(z)/dz = 0$ *se* $i \neq j$*, da cui*

$$\frac{d}{dz}\Delta_F(z) = \sum_{i=1}^{n}[\mathrm{adj}(zI - F)]_{ii} = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(zI - F)).$$

Se $z = \lambda_0$*, la derivata di* $\Delta_F(z)$ *è positiva, quindi è positiva la traccia di* $\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)$*, quindi* $\mathrm{adj}(\lambda_0 I - F)$ *è strettamente positiva. Se* $z > \lambda_0$*, la matrice* $(zI - F)^{-1}$ *è strettamente positiva (proposizione 11.5.6) e* $\Delta_F(z) > \Delta_F(\lambda_0) = 0$ *è un numero positivo. Quindi è strettamente positiva la matrice* $\mathrm{adj}(zI - F) = (zI - F)^{-1}\Delta_F(z)$*.*

11.6 Proprietà spettrali di matrici non negative generiche

Per una arbitraria matrice non negativa, alcune delle conclusioni del teorema di Perron Frobenius valgono in forma più "debole".

Proposizione 11.6.1 [Matrici riducibili: teorema di Perron-Frobenius] *Se* $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *è una matrice non negativa,*

i) [Autovalore massimale non negativo, con autovettore positivo] *esistono un numero reale* $\lambda_0 \geq 0$ *e un vettore* $\mathbf{v}_0 > \mathbf{0}$ *tali che*

$$F\mathbf{v}_0 = \lambda_0 \mathbf{v}_0; \tag{11.92}$$

ii) [Struttura generale dello spettro] *per ogni altro autovalore* $\lambda \in \Lambda(F)$ *si ha* $|\lambda| \leq \lambda_0$*;*

iii) [Spettro periferico] *gli autovalori di massimo modulo hanno tutti una fase che è un multiplo razionale di* 2π*. Esistono inoltre interi* $\eta_1, \dots, \eta_g$*,* $g \leq n$*, per cui gli autovalori a modulo* λ_0 *sono tutti e soli i numeri complessi dati da*

$$\lambda_0 e^{j\frac{2\pi}{\eta_h}k_h}, \quad h = 1, 2 \dots, g, \quad k_h = 1, 2, \dots, \eta_h \; ; \tag{11.93}$$

iv) [Quando esiste un autovettore strettamente positivo in U_{λ_0}?] *l'autospazio* U_{λ_0}*, corrispondente all'autovalore massimale* λ_0*, comprende un autovettore* $\mathbf{v}_0$ *strettamente positivo se e solo se, nella forma normale (11.20),* λ_0 *è autovalore di tutti i blocchi isolati* $\bar{F}_{i,i}$*,* $i = 1, 2, \dots, h$ *, ma non è autovalore degli altri blocchi diagonali* $\bar{F}_{i,i}$*,* $i > h$*;*

v) [Monotonicità dell'autovalore massimale] *se* $\bar{F}$ *è maggiore di* F*, ovvero* $\bar{F} - F > 0$*, i corrispondenti autovalori massimali non negativi* $\bar{\lambda}_0$ *e* λ_0 *soddisfano la diseguaglianza* $\bar{\lambda}_0 \geq \lambda_0$*.*

Prova (i) e (ii) Se lo spettro di F contiene solo l'autovalore nullo, la matrice F è nilpotente. Scelto un arbitrario vettore $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, esiste una potenza minima ν in corrispondenza alla quale vale $F^\nu \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Allora il vettore positivo e non nullo $\mathbf{v}_0 := F^{\nu-1}\mathbf{x}$ soddisfa $F\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_0$.

Se F non è nilpotente, denotato con $\lambda_0 > 0$ il massimo fra gli autovalori di Perron dei blocchi diagonali irriducibili nella forma normale, lo spettro di F contiene λ_0 e soddisfa la condizione $\lambda_0 \geq |\lambda|$, $\forall \lambda \in \Lambda(F)$. Rimane da verificare che a λ_0 corrisponde almeno un autovettore positivo. Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore corrispondente a λ_0, da $F\mathbf{u} = \lambda_0 \mathbf{u}$ segue

$$F|\mathbf{u}| \geq \lambda_0 |\mathbf{u}|. \tag{11.94}$$

e se (11.94) vale come eguaglianza, abbiamo concluso. Se (11.94) vale come diseguaglianza, consideriamo il sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{S}$ definito da $\mathcal{D} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} : F\mathbf{x} \geq \lambda_0 \mathbf{x}\}$. Esso è compatto e convesso, e la mappa

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D} : \mathbf{x} \mapsto \frac{F\mathbf{x}}{\sum_{i=1}^n (F\mathbf{x})_i} = \frac{F\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T F\mathbf{x}}. \tag{11.95}$$

- è ben definita e continua in $\mathcal{D}$, dato che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ il denominatore di (11.95), $\mathbf{1}^T F\mathbf{x}$, soddisfa

$$\mathbf{1}^T F\mathbf{x} \geq \mathbf{1}^T \lambda_0 \mathbf{x} = \lambda_0;$$

- ha immagine effettivamente contenuta in $\mathcal{D}$: da $F\mathbf{x} \geq \lambda_0 \mathbf{x}$ segue infatti

$$F\phi(\mathbf{x}) = F\frac{F\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T F\mathbf{x}} \geq F\frac{\lambda_0 \mathbf{x}}{\mathbf{1}^T F\mathbf{x}} = \lambda_0 \frac{F\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T F\mathbf{x}} = \lambda_0 \phi(\mathbf{x}).$$

Per il teorema di Brouwer-Tychonov ϕ ammette un punto fisso $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{D}$, ovvero

$$\left[\mathbf{1}^T F\mathbf{v}_0\right] \mathbf{v}_0 = \tilde{\lambda}_0 \mathbf{v}_0 = F\mathbf{v}_0, \text{ con } \tilde{\lambda}_0 = \mathbf{1}^T F\mathbf{v}_0.$$

Da $F\mathbf{v}_0 \geq \lambda_0 \mathbf{v}_0$ (perché $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{D}$) e da $F\mathbf{v}_0 = \tilde{\lambda}_0 \mathbf{v}_0$ segue $\tilde{\lambda}_0 \geq \lambda_0$ e quindi $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$, dal momento che λ_0 è un autovalore di modulo massimo.

iii) Lo spettro periferico di F è costituito dagli autovalori a modulo λ_0. Se $\lambda_0 > 0$ (altrimenti l'enunciato è banale), è immediato che lo spettro periferico di F è formato dagli autovalori a modulo massimo dei blocchi diagonali irriducibili a raggio spettrale λ_0 nella forma normale (11.20) $\bar{F}$ di F. Basta allora applicare il teorema di Frobenius-Perron per le matrici irriducibili (proposizione 11.5.1).

iv) Riferiamoci alla forma normale $\bar{F}$. Se l'autovalore non negativo massimale λ_0 è nullo, la matrice $\bar{F}$ è nilpotente e la condizione $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{0}$ è incompatibile con la condizione $\bar{F}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, a meno che non sia $F = 0$. Se $\lambda_0 > 0$, consideriamo l'equazione

$$\bar{F}\mathbf{v}_0 = \left[\begin{array}{cccc|ccc}
\bar{F}_{1,1} & & & & & & \\
0 & \bar{F}_{2,2} & & & & O & \\
0 & \dots & \ddots & & & & \\
0 & 0 & \dots & \bar{F}_{h,h} & & & \\
\hline
\star & \star & \dots & \star & \bar{F}_{h+1,h+1} & & \\
\star & \star & \dots & \star & \star & \ddots & \\
\star & \star & \dots & \star & \star & \star & \bar{F}_{k,k}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\mathbf{v}_0^{(1)} \\ \mathbf{v}_0^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_0^{(h)} \\ \hline \mathbf{v}_0^{(h+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_0^{(k)}
\end{array}\right]
= \lambda_0
\left[\begin{array}{c}
\mathbf{v}_0^{(1)} \\ \mathbf{v}_0^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_0^{(h)} \\ \hline \mathbf{v}_0^{(h+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_0^{(k)}
\end{array}\right] \tag{11.96}$$

e imponiamo che le componenti $\mathbf{v}_0^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, k$, della partizione di $\mathbf{v}_0$ siano tutte strettamente positive. Allora λ_0 risulta essere autovalore dei blocchi isolati $\bar{F}_{i,i}$, $i = 1, 2, \ldots, h$. Verifichiamo che λ_0 è maggiore dell'autovalore massimale $\lambda_0^{(h+1)}$ del blocco $\bar{F}_{h+1,h+1}$. Utilizziamo la $(h+1)$-esima riga di (11.96):

$$\lambda_0 \mathbf{v}_0^{(h+1)} = \sum_{j=1}^{h} \bar{F}_{h+1,j} \mathbf{v}_0^{(j)} + \bar{F}_{h+1,h+1} \mathbf{v}_0^{(h+1)}. \qquad (11.97)$$

Se $\bar{F}_{h+1,h+1}$ è nulla, si ha $\lambda_0 > \lambda_0^{(h+1)} = 0$. Se è irriducibile, premoltiplichiamo entrambi i membri di (11.97) per l'autovettore sinistro $(\mathbf{w}_0^{(h+1)})^T \gg \mathbf{0}^T$ relativo all'autovalore $\lambda_0^{(h+1)}$ di $\bar{F}_{h+1,h+1}$. Poiché $\bar{F}_{h+1,j}$ è positiva per qualche $j \leq h$ e le componenti $\mathbf{v}_0^{(j)}$ sono strettamente positive, si ottiene

$$\lambda_0 (\mathbf{w}_0^{(h+1)})^T \mathbf{v}_0^{(h+1)} = (\mathbf{w}_0^{(h+1)})^T \sum_{j=1}^{h} \bar{F}_{h+1,j} \mathbf{v}_0^{(j)} + \lambda_0^{(h+1)} (\mathbf{w}_0^{(h+1)})^T \mathbf{v}_0^{(h+1)} > \lambda_0^{(h+1)} (\mathbf{w}_0^{(h+1)})^T \mathbf{v}_0^{(h+1)}.$$

Atteso che $(\mathbf{w}_0^{(h+1)})^T \mathbf{v}_0^{(h+1)}$ è un numero positivo, si conclude che $\lambda_0 > \lambda_0^{(h+1)}$. Un analogo ragionamento vale per gli autovalori massimali dei successivi blocchi diagonali non isolati. Viceversa, nell'ipotesi che $\lambda_0 > 0$ sia autovalore massimale di tutti i blocchi diagonali isolati e che gli altri blocchi diagonali abbiano autovalori massimali $\lambda_0^{(i)} < \lambda_0$, proviamo che l'equazione (11.96) ammette soluzione $\mathbf{v}_0$ strettamente positiva. Allo scopo, scegliamo come componenti $\mathbf{v}_0^{(i)}$, $i \leq h$, gli autovettori strettamente positivi dei blocchi diagonali isolati forniti dal teorema di Frobenius. L'equazione

$$(\lambda_0 I - \bar{F}_{h+1,h+1}) \mathbf{v}_0^{(h+1)} = \sum_{j=1}^{h} \bar{F}_{h+1,j} \mathbf{v}_0^{(j)}$$

nell'incognita $\mathbf{v}_0^{(h+1)}$ ammette una soluzione strettamente positiva. Infatti, essendo $\lambda_0^{(h+1)} < \lambda_0$, per la proposizione 11.5.7 $(\lambda_0 I - \bar{F}_{h+1,h+1})^{-1}$ è una matrice strettamente positiva e

$$\mathbf{v}_0^{(h+1)} = (\lambda_0 I - \bar{F}_{h+1,h+1})^{-1} \sum_{j=1}^{h} \bar{F}_{h+1,j} \mathbf{v}_0^{(j)} \gg \mathbf{0}$$

fornisce una soluzione strettamente positiva perché il vettore $\sum_{j=1}^{h} \bar{F}_{h+1,j} \mathbf{v}_0^{(j)}$ è positivo. Induttivamente, possiamo costruire allo stesso modo le componenti $\mathbf{v}_0^{(h+2)}, \ldots, \mathbf{v}_0^{(k)}$.

v) Per ogni $\epsilon > 0$ le matrici $\bar{F}_\epsilon := \bar{F} + \epsilon \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ e $F_\epsilon := F + \epsilon \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ sono strettamente positive e soddisfano la diseguaglianza $\bar{F}_\epsilon > F_\epsilon$. Indicati con $\bar{\lambda}_0^{(\epsilon)}$ e con $\lambda_0^{(\epsilon)}$ i rispettivi autovalori massimali, dal punto (v) del teorema di Perron abbiamo, per ogni valore positivo di ϵ, $\bar{\lambda}_0^{(\epsilon)} > \lambda_0^{(\epsilon)}$. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ e tenuto conto che gli autovalori sono funzione continua degli elementi delle matrici, otteniamo $\bar{\lambda}_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \bar{\lambda}_0^{(\epsilon)} \geq \lim_{\epsilon \to 0} \lambda_0^{(\epsilon)} = \lambda_0$. ■

- Esercizio 11.6.1 (i) Sia $\bar{F}$ la matrice positiva in forma normale (11.20), con autovalore positivo massimo $\lambda_0 > 0$, e siano $\bar{F}_{i,i}$ e $\bar{F}_{j,j}$ il primo e l'ultimo blocco diagonale (eventualmente coincidenti) relativi all'autovalore λ_0.

  (i) Se $\mathbf{v}_0$ è un autovettore destro positivo di λ_0, i blocchi $\mathbf{v}_0^{(\ell)}$, $\ell < i$ sono tutti nulli.

  (ii) Se il primo dei blocchi non nulli di $\mathbf{v}_0$ è $\mathbf{v}_0^{(\nu)}$, allora $\mathbf{v}_0^{(\nu)} \gg \mathbf{0}$ è un autovettore destro del blocco

irriducibile $\bar{F}_{\nu,\nu}$, relativo all'autovalore positivo massimo λ_0.
(iii) Se $t \leq j$ e se $\tilde{\mathbf{v}}_0 > \mathbf{0}$ è un autovettore della sottomatrice

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{t,t} & & & \\ \bar{F}_{t+1,t} & \bar{F}_{t+1,t+1} & & \\ & & \ddots & \\ \bar{F}_{k,t} & \bar{F}_{k,t+1} & \dots & \bar{F}_{k,k} \end{bmatrix}$$

relativo all'autovalore λ_0, allora il vettore $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_+$ è autovettore di $\bar{F}$.

Corollario 11.6.2 [Sottomatrici principali di una matrice non negativa] *Se $F \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ e $\lambda_0 \geq 0$ è il suo autovalore massimale, ogni sottomatrice $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{m\times m}_+$ ottenuta da F cancellando $n - m > 0$ righe e colonne di egual indice ha autovalore massimale $\tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_0$. Se F è irriducibile, la diseguaglianza vale in senso stretto: $\tilde{\lambda}_0 < \lambda_0$.*

Prova Non è restrittivo ipotizzare che $\tilde{F}$ sia il blocco F_{11} della matrice $F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$.
Per ogni $\alpha \in [0, 1]$, si ha

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \geq F_\alpha := \begin{bmatrix} F_{11} & \alpha F_{12} \\ \alpha F_{21} & \alpha F_{22} \end{bmatrix} \geq F_0 := \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se denotiamo con $\lambda_0^{(\alpha)}$ l'autovalore massimale di F_α, si ha $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0^{(0)}$. Scegliamo allora $\alpha \in (0, 1)$. Per il punto (v) delle proposizioni 11.5.1 e 11.6.1 si ha

$$\lambda_0 = \lambda_0^{(1)} \geq \lambda_0^{(\alpha)} \geq \lambda_0^{(0)} = \tilde{\lambda}_0,$$

e la prima diseguaglianza è stretta, $\lambda_0^{(1)} > \lambda_0^{(\alpha)}$, se F è irriducibile. ■

- Esercizio 11.6.2 [Proprietà di $\lambda I - F$] Se λ_0 è l'autovalore non negativo massimo della matrice non negativa $F = [f_{ij}]$ e se $\lambda > \lambda_0$, allora
(i) F/λ è matrice asintoticamente stabile;
(ii) per ogni i risulta $f_{ii} \leq \lambda_0$;
(iii) gli elementi diagonali di $\lambda I - F$ sono positivi e non positivi gli altri[14];
(iv) il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T = (\lambda I - F)^{-1}\mathbf{1}$ è un vettore strettamente positivo;
(v) posto $D = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots v_n\}$, la matrice $R := (\lambda I - F)D$ è diagonalmente dominante per righe (ossia $|r_{ii}| > \sum_{j\neq i} |r_{ij}|$).

  ♯ *Suggerimenti: (ii) dal corollario 11.6.2; (iv) $(\lambda I - F)^{-1}\mathbf{1} = \lambda^{-1}\left[I_n + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-i} F^i\right]\mathbf{1} \geq \lambda^{-1}\mathbf{1}$; (v) da $D\mathbf{1} = (\lambda I - F)^{-1}\mathbf{1}$ segue $(\lambda I - F)D\mathbf{1} = \mathbf{1}$; quindi le righe di $(\lambda I - F)D$ hanno somma unitaria e $|(\lambda - f_{ii})v_i| = (\lambda - f_{ii})v_i > \sum_{j\neq i} f_{ij}v_j = \sum_{j\neq i} |f_{ij}v_j|$.*

- Esercizio 11.6.3 Se F è una generica matrice positiva di dimensioni $n \times n$
(i) è vero che gli autovalori a modulo massimo hanno fase multipla di $\frac{2\pi}{n}$? e fase multipla di $\frac{2\pi}{n!}$?
(ii) se λ_0 è il suo raggio spettrale, l'autospazio U_{λ_0} ha una base di autovettori positivi?
(iii) se la forma normale di F contiene 3 blocchi diagonali irriducibili relativi all'autovalore massimale λ_0, quale fra le seguenti conclusioni possiamo trarre circa la forma di Jordan di F?
  - contiene tre miniblocchi relativi all'autovalore λ_0?
  - contiene un miniblocco di ordine 3 relativo all'autovalore λ_0?
  - può contenere, a seconda dei casi, da uno a tre miniblocchi relativi all'autovalore λ_0?

[14] una matrice A soddisfacente la condizione $a_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$ si dice una *Z-matrice* .

♯ *Suggerimento. (ii) La matrice nilpotente* $F = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times(n-1)} & \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{1}_{n-1}^T & 0 \end{bmatrix}$ *ha rango 1. Poiché* $\dim\ker F = \dim U_{\lambda_0} = n-1$, *essa ammette altri autovettori, oltre all'autovettore positivo* $\mathbf{e}_n$. *Quali?*

L'autovalore massimale λ_0 di una matrice non negativa può essere stimato, e in taluni casi determinato con esattezza, a partire dalle somme degli elementi di riga o di colonna.

Proposizione 11.6.3 [Somme di riga o di colonna e autovalore massimale] *Se* $F = [f_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *è una matrice non negativa e se*

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij},\ j = 1, 2, \ldots n \quad \text{e} \quad r_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij},\ i = 1, 2, \ldots n$$

sono le somme degli elementi che costituiscono rispettivamente la colonna j*-esima e la riga* i*-esima di* F*, allora l'autovalore massimale non negativo* λ_0 *soddisfa le diseguaglianze*

$$\min_j c_j \leq \lambda_0 \leq \max_j c_j\ ; \qquad \min_i r_i \leq \lambda_0 \leq \max_i r_i \tag{11.98}$$

Prova Non è restrittivo supporre che l'autovettore

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

corrispondente all'autovalore λ_0 abbia somma delle componenti unitaria. Allora da

$$\begin{array}{rcl} f_{11}\xi_1 + f_{12}\xi_2 + \ldots + f_{1n}\xi_n & = & \lambda_0\xi_1 \\ f_{21}\xi_1 + f_{22}\xi_2 + \ldots + f_{2n}\xi_n & = & \lambda_0\xi_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ f_{n1}\xi_1 + f_{n2}\xi_2 + \ldots + f_{nn}\xi_n & = & \lambda_0\xi_n \end{array} \tag{11.99}$$

sommando per colonne si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i1}\xi_1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i2}\xi_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} f_{in}\xi_n = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n = \lambda_0 \sum_{j=1}^{n} \xi_j = \lambda_0 \tag{11.100}$$

Dalle diseguaglianze

$$\min_j c_j[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n] \leq c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n \leq \max_j c_j[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n]$$

tenendo conto di (11.100) e del fatto che le componenti di $\mathbf{v}_0$ hanno somma unitaria, segue

$$\min_j c_j \leq \lambda_0 \leq \max_j c_j\ . \tag{11.101}$$

Analogamente, ragionando sull'autovettore sinistro (o considerando la matrice F^T), si perviene a

$$\min_i r_i \leq \lambda_0 \leq \max_i r_i\ . \tag{11.102}$$

■

- Esercizio 11.6.4 (i) La stima (11.98) dell'autovalore massimale può essere raffinata:

$$\max\{\min_j c_j, \min_i r_i\} \leq \lambda_0 \leq \min\{\max_j c_j, \max_i r_i\}$$

(ii) In una matrice non negativa risulta $\max_i r_i \geq \min_j c_j$.
$\sharp$ *Suggerimento: si noti che* $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \leq n \max_i r_i$ *e che* $n \min_j c_j \leq (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$.

(iii) La diseguaglianza in (ii) vale per anche per matrici cui elementi hanno segno arbitrario?

- Esercizio 11.6.5 Se $A \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, sia $r_i(A),\ i = 1, \ldots, p$ la somma degli elementi della riga i-esima di A e si ponga $\alpha = \max_i r_i(A)$. Analogamente, se $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, sia $r_j(B),\ j = 1, \ldots, m$ la somma degli elementi della riga j-esima di B e si ponga $\beta = \max_j r_j(B)$. Allora
(i) ogni riga del prodotto AB ha somma degli elementi non superiore a $\alpha\beta$.
$\sharp$ *Suggerimento:* $r_\ell(AB) = \sum_{j,k} a_{\ell j} b_{jk} = \sum_j a_{\ell j} \sum_k b_{jk} = \sum_j a_{\ell j} r_j(B) \leq \sum_j a_{\ell j}\beta \leq \alpha\beta$.

Se A e B sono quadrate, i.e. $p = n = m$, allora
(ii) se $\alpha\beta < 1$ allora AB e BA sono asintoticamente stabili;
(iii) se $\beta \leq 1$ e $\alpha < 1$, ogni matrice M che sia prodotto di ν_A fattori eguali ad A e ν_B fattori eguali a B ha somme di riga non superiori a α^{ν_A}. Al divergere del numero dei fattori A la matrice M è infinitesima.

11.7 M-matrici e matrici di Hurwitz-Metzler

Nella discussione sulla struttura dei sistemi positivi (discreti e continui) torna utile introdurre e studiare alcune classi di matrici strettamente connesse alle non negative: le Z-matrici, le M-matrici e le loro opposte (le matrici di Metzler e di Hurwitz-Metzler).

Definizione 11.7.1 [Z-matrici, matrici di Metzler, M-matrici] *Una matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *si dice*

i) una Z-matrice se gli elementi non diagonali sono non positivi, ovvero $a_{ij} \leq 0,\ \forall i \neq j$*;*

ii) una matrice di Metzler se i suoi elementi non diagonali sono non negativi (ossia se A *è l'opposta di una Z-matrice);*

iii) una M-matrice se è una Z-matrice ed è positiva[15] *la parte reale di tutti i suoi autovalori;*

iv) una matrice di Hurwitz-Metzler se è una matrice di Metzler ed è negativa la parte reale di tutti i suoi autovalori (ossia se A *è l'opposta di una M-matrice)*

Evidentemente, le Z-matrici di ordine n sono tutte e sole le matrici del tipo

$$A = \lambda I_n - F, \quad F \in \mathbb{R}_+^{n\times n},\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11.103}$$

Poiché lo spettro di F comprende un autovalore reale non negativo massimale λ_0 ed è contenuto nel cerchio dal piano complesso avente centro l'origine e raggio λ_0, lo spettro della Z-matrice A, che è legato a quello di F dalla relazione $\Lambda(A) = \lambda - \Lambda(F)$, consta di un

[15] la definizione di M-matrice adottata qui è più restrittiva di quella di Berman-Plemmons "Non negative matrices in the mathematical sciences" (Academic Press, 1979). Nella definizione di B.P. la parte reale degli autovalori di una M-matrice A deve essere non negativa e quindi si ammette che una M-matrice possa essere singolare. La definizione 11.7.1 (iii) coincide con quella di K-matrice (o di M-matrice) introdotta in Fiedler-Ptack "On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors" (Czech Math.J., vol 12 (1962), 382-400); se si adotta invece la definizione di B.P., le matrici qui considerate sono le *M-matrici non singolari.*

autovalore reale $\mu_0 = \lambda - \lambda_0$ a parte reale minima, e ogni altro autovalore di A appartiene al cerchio con centro in λ e raggio λ_0. Si noti che la matrice risolvente $(\lambda I_n - F)^{-1}$ di una matrice non negativa F è l'inversa di una Z-matrice (quando λ è reale).

Analogamente, le matrici di Metzler sono quelle che possono essere scritte nella forma $A = F - \lambda I_n$, con $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Lo spettro $\Lambda(A) = \Lambda(F) - \lambda$ consta allora di un autovalore reale $\mu_0 = \lambda_0 - \lambda$ a parte reale massima, e ogni altro autovalore di A appartiene al cerchio con centro in $-\lambda$ e raggio λ_0.

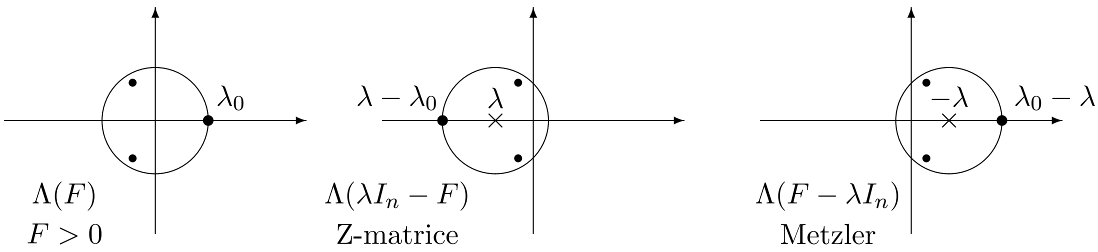

Figura 11.7.1

Le M-matrici (e le matrici di Hurwitz-Metzler, loro opposte) sono state e sono tuttora oggetto di un'intensa attività di studio: esse costituiscono, direttamente o tramite altre classi di matrici ad esse collegate, un fondamentale strumento per l'analisi di ampie classi di sistemi in Economia, in Biologia, in Ecologia, etc. La proposizione 11.7.2 riunisce alcuni importanti risultati sulle M-matrici, che saranno utilizzati nel seguito di questi Appunti. A completamento, la proposizione successiva riporta ulteriori caratterizzazioni, ma è lontana dal fornire un quadro completo dei numerosi risultati reperibili in letteratura.

Proposizione 11.7.2 [Caratterizzazioni delle M-matrici] *Sia A una Z-matrice di ordine n. Si equivalgono i seguenti fatti:*

0) *A è una M-matrice, ovvero $\mathcal{R}\mathrm{e}(\Lambda(A)) > 0$;*

i) [Connessione con le matrici positive] *A è esprimibile nella forma $\lambda I_n - F$, con $F \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ e con $\lambda > \lambda_0$, dove λ_0 denota l'autovalore massimale non negativo di F;*

ii) [Coefficienti del polinomio caratteristico] *i coefficienti del polinomio caratteristico di $-A$ sono tutti positivi[16], ovvero $\Delta_{-A}(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \ldots + \alpha_0,\ \alpha_i > 0, \forall i$;*

iii) [Positività dell'inversa] *A è non singolare e la sua inversa A^{-1} è una matrice positiva;*

iv) [A può mappare in $\mathbb{R}_+^n$ soltanto vettori non negativi] *per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la condizione $A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ implica $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$;*

v) [A mappa internamente a $\mathbb{R}_+^n$ qualche punto interno di $\mathbb{R}_+^n$] *esiste un vettore $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ per cui risulta $A\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.*

[16] quindi i coefficienti del polinomio caratteristico per una matrice di Metzler-Hurwitz sono tutti positivi e per una M-matrice sono di segno alterno.

PROVA Dimostreremo le implicazioni secondo lo schema seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
0) & \Leftrightarrow & i); & & & & \\
0) & \Leftrightarrow & ii); & & & & \\
i) & \Rightarrow & iii) & \Rightarrow & iv) & \Rightarrow & i); \\
iii) & \Rightarrow & v) & & & &
\end{array}$$

$0) \Leftrightarrow i)$ Poiché A è una Z-matrice, è esprimibile nella forma $A = \lambda I - F$ con $F := \lambda I_n - A$ matrice non negativa. Se $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sono gli autovalori di F e $\lambda_0 \geq 0$ ne è l'autovalore di Perron, gli autovalori di A sono

$$\lambda - \lambda_0,\ \lambda - \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda - \lambda_{n-1} \tag{11.104}$$

e quello con parte reale minima è $\lambda - \lambda_0$. La condizione che abbiano tutti parte reale positiva equivale allora a

$$\lambda > \lambda_0. \tag{11.105}$$

$0) \Leftrightarrow ii)$ Se gli autovalori di $\lambda I - F$ hanno parte reale positiva, quelli di $-A = F - \lambda I_n$ hanno parte reale negativa e pertanto il polinomio caratteristico di $-A$, ha positivi tutti i coefficienti[17] perché prodotto di fattori polinomiali di primo e secondo grado con coefficienti positivi.

Viceversa, denotiamo con $\mu > 0$ una costante non negativa per cui $F := -A + \mu I$ sia matrice positiva, con autovalore di Perron $\lambda_0 \geq 0$. Poiché i coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_{-A}(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$ sono tutti positivi, non può essere $\mu \leq \lambda_0$. Altrimenti la matrice $-A = F - \mu I$ avrebbe qualche autovalore ξ_0 positivo o nullo che, risultando zero del polinomio caratteristico, soddisfa

$$\Delta_{-A}(\xi_0) = \xi_0^n + \alpha_{n-1}\xi_0^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \xi_0 + \alpha_0 = 0,$$

in contraddizione con la positività di tutti i coefficienti α_i. Allora deve essere $\mu > \lambda_0$, la matrice $-A = F - \mu I$ ha soltanto autovalori a parte reale negativa e A è una M-matrice.

$i) \Rightarrow iii)$ Poiché in $A = \lambda I - F$ tutti gli autovalori hanno parte reale positiva, A è non singolare e, per il lemma 11.5.6, da (11.105) consegue la sviluppabilità di $(\lambda I - F)^{-1}$ in serie di Neumann

$$A^{-1} = (\lambda I_n - F)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^i}{\lambda^{i+1}},$$

nella quale tutti gli addendi sono non negativi. Pertanto la matrice A^{-1} è positiva.

$iii) \Rightarrow iv)$ Da $A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, essendo positiva la matrice A^{-1} risulta anche $A^{-1}(A\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

$iv) \Rightarrow i)$ Rappresentiamo la Z-matrice A nella forma $A = \lambda I - F$, con $F \geq 0$, e sia $\mathbf{v}_0 > \mathbf{0}$ l'autovettore di Perron di F. Risulta allora

$$A(-\mathbf{v}_0) = (\lambda I - F)(-\mathbf{v}_0) = (\lambda - \lambda_0)(\mathbf{v}_0),$$

incompatibile con la (iv) se $\lambda \leq \lambda_0$

[17] e la matrice opposta, A, ha un polinomio caratteristico con coefficienti di segno alterno

iii) $\Rightarrow$ *v)* Sia $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ un arbitrario vettore strettamente positivo. Allora $\mathbf{p} := A^{-1}\mathbf{x}$ è strettamente positivo, perché A^{-1} è positiva in ogni sua riga, e soddisfa ovviamente $A\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.

v) $\Rightarrow$ *i)* Dalla condizione $A\mathbf{p} = (\lambda I - F)\mathbf{p} := \mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ segue, premoltiplicando per un autovettore sinistro $\mathbf{w}_0^T > \mathbf{0}^T$ corrispondente all'autovalore di Perron λ_0 della matrice F,

$$\mathbf{w}_0^T(\lambda I - F)\mathbf{p} = \mathbf{w}_0^T\mathbf{x} = (\lambda - \lambda_0)\mathbf{w}_0^T\mathbf{p}.$$

L'ultima uguaglianza implica $\lambda > \lambda_0$ e pertanto la (i). ■

Proposizione 11.7.3 * [Ulteriori caratterizzazioni delle M-matrici] *Sia A una Z-matrice di ordine n. Si equivalgono i seguenti fatti:*

0) *A è una M-matrice, ovvero $\mathcal{R}\mathrm{e}(\Lambda(A)) > 0$;*

vi) [Prodotto per matrici diagonali e dominanza] *esiste una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ con $d_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, tale che la matrice $\bar{A} := AD$ ha diagonale principale positiva e strettamente dominante per righe, ovvero $\bar{a}_{ii} > \sum_{j \neq i} |\bar{a}_{ij}|$;*

vii) [Dominanza e similarità con matrici diagonali] *esiste una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ con $d_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, tale che la matrice $A^{(S)} := D^{-1}AD$ ha diagonale principale positiva ed è strettamente dominante per righe;*

viii) [A è una P-matrice[18]] *sono positivi i minori principali "annidati" di A, ovvero*

$$a_{11} > 0,\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0,\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} > 0,\ \ldots, \det A > 0 \quad (11.106)$$

e quindi tutti i minori principali di A;

ix) [Fattorizzazione LU] *A fattorizza nel prodotto di due Z-matrici triangolari*

$$A = LU,$$

dove L è triangolare inferiore con diagonale positiva e U è triangolare superiore con diagonale positiva;

x) [Equazione di Lyapunov (tempo continuo)] *esiste una matrice diagonale*

$$\tilde{D} = \mathrm{diag}\{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{d}_n\}\ , \qquad \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{d}_n > 0\ ,$$

tale che $\tilde{D}A + A^T\tilde{D}$ è definita positiva.

[18] Una matrice quadrata è una P-matrice se sono positivi tutti i suoi minori principali annidati, è una matrice definita positiva se è una P-matrice simmetrica.

Prova Tenuto conto della proposizione precedente, dimostreremo le implicazioni secondo lo schema:

$$\begin{array}{ccccccc} iv) & \Rightarrow & vi) & \Rightarrow & vii) & \Rightarrow & 0) \\ 0) & \Rightarrow & x) & \Rightarrow & 0) & & \\ i) & \Rightarrow & viii) & \Rightarrow & ix) & \Rightarrow & iii). \end{array}$$

$v) \Rightarrow vi)$ Se $\mathbf{d} = [\, d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n\,]^T \gg \mathbf{0}$ verifica la condizione $A\mathbf{d} \gg \mathbf{0}$, sia D la matrice diagonale con elementi diagonali d_i e sia $\bar{A} = AD$. Abbiamo allora

$$\mathbf{0} \ll A\mathbf{d} = AD\mathbf{1} = \bar{A}\mathbf{1} \tag{11.107}$$

e poiché gli elementi fuori diagonale $\bar{a}_{ij} = a_{ij}d_j$ di $\bar{A}$ sono non positivi, come quelli della Z-matrice A, da (11.107) segue

$$\bar{a}_{ii} > -\sum_{j\neq i} \bar{a}_{ij} = \sum_{j\neq i} |\bar{a}_{ij}| \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11.108}$$

Rimane così provata la stretta positività degli elementi diagonali di $\bar{A}$ (e di A) e la dominanza diagonale per righe della matrice AD.

$vi) \Rightarrow vii)$ Se gli elementi diagonali di $\bar{A} := AD$ sono strettamente positivi e soddisfano le condizioni di dominanza per righe (11.108), lo stesso può dirsi degli elementi della matrice

$$A^{(S)} := D^{-1}AD = D^{-1}\bar{A}.$$

Infatti la riga i-esima di $A^{(S)}$ si ottiene moltiplicando la riga i-esima di $\bar{A}$ per la costante positiva d_i^{-1} e quindi

$$a_{ii}^{(S)} = d_i^{-1}\bar{a}_{ii} > -\sum_{j\neq i} d_i^{-1}\bar{a}_{ij} = \sum_{j\neq i} |d_i^{-1}\bar{a}_{ij}| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}^{(S)}|, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11.109}$$

$vii) \Rightarrow 0)$ Attesa la (11.109), per ogni indice i fra 1 ed n il cerchio γ_i con centro nel punto reale $a_{ii}^{(S)} = a_{ii} > 0$ e raggio $r_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}^{(S)}|$ è contenuto nel semipiano destro aperto $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0$ del piano complesso. Per il teorema di Gershgorin (proposizione 2.11.2), gli autovalori di $A^{(S)}$ sono contenuti nella regione $\cup_{i=1}^n \gamma_i$, quindi nel semipiano destro aperto di $\mathbb{C}$, e lo stesso può dirsi degli autovalori di A, che è matrice simile ad $A^{(S)}$.

$0) \Rightarrow x)$ Supponiamo che A sia una M-matrice. Per quanto abbiamo dimostrato finora, $vii)$, $0)$, $vi)$ sono proprietà equivalenti, quindi esiste una matrice diagonale D con diagonale positiva, tale per cui $D^{-1}AD$ ha diagonale positiva ed è dominante per righe. Inoltre sono M-matrici A^T e DA^TD^{-1}, in quanto Z-matrici aventi il medesimo spettro di A.
D'altra parte, DA^TD^{-1}, trasposta di $D^{-1}AD$, ha pure essa diagonale positiva ed è strettamente dominante per colonne. Per la proprietà $vi)$, applicata alla M-matrice DA^TD^{-1}, esiste una matrice diagonale V, con diagonale positiva, tale per cui

$$(DA^TD^{-1})V = (DA^TD^{-1})\,\mathrm{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \tag{11.110}$$

ha diagonale positiva, è strettamente dominante per righe, ma lo è anche per colonne. Infatti la i-esima colonna di $(DA^TD^{-1})V$ è la i-esima colonna di (DA^TD^{-1}) moltiplicata per il numero positivo v_i. Allora la matrice simmetrica

$$DA^TD^{-1}V + VD^{-1}AD \tag{11.111}$$

ha diagonale positiva ed è strettamente dominante (per righe e per colonne), quindi per il teorema di Gershgorin i suoi autovalori hanno parte reale positiva e (11.111) è definita positiva. Ma allora è definita positiva la matrice

$$D^{-1}[DA^TD^{-1}V+VD^{-1}AD]D^{-1}=A^T[D^{-1}VD^{-1}]+[D^{-1}VD^{-1}]A=A^T\tilde{D}+\tilde{D}A \tag{11.112}$$

in cui $\tilde{D}=D^{-1}VD^{-1}$ è matrice diagonale con elementi diagonali positivi.

$x) \Rightarrow 0)$ Poiché $(-A^T)\tilde{D}+\tilde{D}(-A)$ è definita negativa e $\tilde{D}$ è definita positiva, possiamo concludere, applicando la teoria dell'equazione di Lyapunov, che gli autovalori di $-A$ hanno parte reale negativa. Quindi A è una Z-matrice i cui autovalori hanno parte reale positiva, ovvero è una M-matrice.

$i) \Rightarrow viii)$ Sia $A=\lambda I-F$ con $\lambda>\lambda_0=\rho(F)$.
Da $\det(A)=\det(\lambda I_n-F)=\Delta_F(z)|_{z=\lambda}$, tenuto conto che la funzione polinomiale $\Delta_F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:z\mapsto\Delta_F(z)$ tende a $+\infty$ quando $z\mapsto+\infty$ e non ha zeri[19] sul semiasse $(\lambda_0,+\infty)$, nel punto $\lambda>\lambda_0$ essa assume valore positivo, ovvero è positivo $\det(A)>0$, il minore di ordine n della matrice A.
Per ogni altro minore di ordine $m<n$ di A, si consideri la matrice

$$B=\lambda I_n-\Phi=\lambda I_n-\begin{bmatrix}F_{11} & 0\\ 0 & \operatorname{diag}\{f_{m+1,m+1},\dots,f_{nn}\}\end{bmatrix}. \tag{11.113}$$

dove F_{11} è la sottomatrice di F formata dalle prime m righe e dalle prime m colonne. L'elemento in posizione (i,j) di Φ coincide con quello nella medesima posizione di F se $i,j\le m$ oppure se $i=j$, mentre è nullo negli altri casi. Quindi
- la matrice Φ è non negativa,
- il suo raggio spettrale non eccede λ_0 (autovalore dominante di F), risultando $\Phi\le F$,
- gli elementi diagonali di Φ sono più piccoli di λ (cfr. Esercizio 11.6.2).
Poiché B è una Z-matrice che soddisfa la proprietà $ii)$, per il ragionamento appena svolto si ha $\det(B)>0$ e da

$$\det(B)=\det(\lambda I_m-F_{11})(\lambda-f_{m+1,m+1})\cdots(\lambda-f_{nn})>0$$

segue

$$\det(\lambda I_m-F_{11})=\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{bmatrix}>0. \tag{11.114}$$

Quindi sono positivi tutti i minori principali "annidati".
Si noti infine che per ogni matrice di permutazione Π anche $\Pi^TA\Pi=\lambda I-\Pi^TF\Pi$ è una Z-matrice soddisfacente la (i) e che ogni minore principale di A è minore principale "annidato" (e quindi positivo) di $\Pi^TA\Pi$, per un'opportuna scelta di Π.

$viii) \Rightarrow ix)$ Osserviamo in via preliminare che una Z-matrice triangolare T (inferiore o superiore) con diagonale positiva è una M-matrice e che per l'equivalenza $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$ essa è sempre dotata di inversa positiva (rispettivamente triangolare inferiore o superiore).

[19] λ_0 è l'autovalore dominante della matrice non negativa F

Procediamo ora per induzione sulla dimensione n delle matrici.
Nel caso $n = 1$ l'implicazione $(viii) \Rightarrow (ix)$ è banalmente vera.
Assumiamo perciò che essa valga per tutte le Z-matrici di ordine $n-1$ che sono P-matrici, e proviamo che, se A_n è una Z-matrice di ordine n e tutti i suoi minori principali annidati sono positivi, allora essa fattorizza nel prodotto L_nU_n di Z-matrici triangolari, dove L_n e U_n sono rispettivamente triangolare inferiore e triangolare superiore con diagonale positiva.
Partizionando a blocchi A_n, abbiamo

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{11.115}$$

in cui A_{n-1} è una Z-matrice di ordine $n-1$, mentre $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ sono vettori aventi tutte le componenti non negative. Risultando positivi i minori principali annidati di A_n e quindi di A_{n-1}, per l'ipotesi induttiva vale la fattorizzazione $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$, con L_{n-1} e U_{n-1} Z-matrici, triangolare inferiore la prima e triangolare superiore la seconda, entrambe con diagonale positiva.
Dalla relazione

$$\det(A_n)/\det(A_{n-1}) = \det(a_{nn} - \mathbf{c}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}) > 0 \tag{11.116}$$

segue che le matrici triangolari

$$L_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ \\ -\mathbf{c}^T U_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U_n = \begin{bmatrix} U_{n-1} & -L_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ \\ 0 & a_{nn} - \mathbf{c}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}, \tag{11.117}$$

hanno positive le diagonali principali e soddisfano la condizione $A_n = L_nU_n$. Poichè L_{n-1} e U_{n-1} sono dotate di inversa positiva per l'osservazione preliminare, attesi i segni degli elementi di $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ possiamo concludere che sia L_n che U_n sono Z-matrici.

$ix) \Rightarrow iii)$ L ed U sono Z-matrici triangolari con diagonale positiva, quindi sono M-matrici, dotate ciascuna di un'inversa positiva. Allora

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

implica (l'esistenza) e la positività di A^{-1}. ■

- Esercizio 11.7.1 Si consideri la Z-matrice

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -\ell_{21} & \ell_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ -\ell_{n1} & -\ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ell_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\ell_{21} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ -\ell_{n1} & -\ell_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{diag}\{\ell_{11}, \ell_{22}, \dots, \ell_{nn}\} - P \end{aligned}$$

con $\ell_{ii} > 0,\ i = 1, \dots, n$ e $P \geq 0$. Posto $\tilde{P} = \operatorname{diag}\{\ell_{11}^{-1}, \ell_{22}^{-1}, \dots, \ell_{nn}^{-1}\}P$, si verifichi che

$$L^{-1} = [I_n + \tilde{P} + \dots + \tilde{P}^{n-1}]\operatorname{diag}\{\ell_{11}^{-1}, \ell_{22}^{-1}, \dots, \ell_{nn}^{-1}\}$$

- Esercizio 11.7.2 [Ulteriori caratterizzazioni delle M-matrici] Per una Z-matrice A si equivalgono i seguenti fatti

  0) A è una M-matrice;

v bis) esiste un vettore riga $\mathbf{w}^T \gg \mathbf{0}$ per cui risulta $\mathbf{w}^T A \gg \mathbf{0}^T$;

xi) [D-STABILITÀ DI $-A$] la matrice AD ha autovalori a parte reale positiva per ogni matrice diagonale D avente positivi tutti gli elementi diagonali (ovvero $-AD$ ha autovalori a parte reale negativa per ogni D, proprietà che va sotto il nome di "D-stabilità" della matrice $-A$)

xii) ogni sottomatrice principale di A ha spettro contenuto nel semipiano $\mathcal{R}e(s) > 0$ (e quindi è una M-matrice)

♯ *Suggerimento:* 0) $\Rightarrow$ *xi) Per ogni D diagonale a diagonale positiva AD è una Z-matrice. Essendo invertibile con inversa positiva la matrice A (Proposizione 11.7.2.iii), anche $(AD)^{-1} = D^{-1}A^{-1}$ esiste ed è positiva. Quindi AD è una M-matrice. Per xii) si ricorra al punto viii) della proposizione 11.7.2.*

- ESERCIZIO 11.7.3 [M-MATRICI SIMMETRICHE] Una Z-matrice simmetrica A è una M-matrice se e solo se $A = U^T U$, dove U è una Z-matrice triangolare superiore con diagonale positiva.

♯ *Suggerimento. Si proceda per induzione su n come al punto (ix) della proposizione 11.7.2, ponendo*

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{b}^T & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad A_{n-1} = U_{n-1}^T U, \qquad U_n = \begin{bmatrix} U_{n-1} & -(U_{n-1}^T)^{-1}\mathbf{b} \\ 0 & \sqrt{a_{nn} - \mathbf{b}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

- ESERCIZIO 11.7.4 [ANCORA SULLA CARATTERIZZAZIONE DELLE M-MATRICI] Una Z-matrice A di dimensione $n \times n$ è una M-matrice se e solo se

xiii) per ogni vettore $\mathbf{d} \gg \mathbf{0}$, l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette una soluzione $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$;

xiv) l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{1}_n$ ammette una soluzione $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$.

♯ *Suggerimento (xiii) Se A è una M-matrice, per il punto (iii) della proposizione 11.7.2 esiste A^{-1} ed è positiva. Quindi l'equazione è risolta dal vettore strettamente positivo $A^{-1}\mathbf{d}$. Viceversa, se per ogni $\mathbf{d} \gg \mathbf{0}$ esiste una soluzione $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$, lo spazio immagine di A è $\mathbb{R}^n$, quindi A è non singolare. Se la sua inversa contenesse un elemento $[A^{-1}]_{ij} < 0$, al vettore strettamente positivo $\mathbf{d} = \epsilon\mathbf{1}_n + \mathbf{e}_j$, $\epsilon > 0$, corrisponderebbe la soluzione $\mathbf{x} = A^{-1}\epsilon\mathbf{1}_n + A^{-1}\mathbf{e}_j$ che per ϵ sufficientemente piccolo ha la componente i-esima negativa.*
(xiv) consegue direttamente da (v) della proposizione 11.7.2 e dal punto (xiii) di questo esercizio.

Il seguente corollario riporta alcune proprietà delle M-matrici, che conseguono dalle caratterizzazioni riportate nella proposizione 11.7.2 :

Corollario 11.7.4 [SPETTRO DELLE M-MATRICI] *Se A è una M-matrice,*

a) l'autovalore $\mu_0(A)$ di A a parte reale minima è un numero reale positivo;

b) se B è una Z-matrice e $B \geq A$, allora anche B è una M-matrice e il suo autovalore a parte reale minima $\mu_0(B)$ soddisfa la diseguaglianza $\mu_0(B) \geq \mu_0(A)$;

c) $\mu_0 \leq a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$.

PROVA a) Ovvia conseguenza della definizione di M-matrice.
b) Poiché B è una Z-matrice, per $\lambda > 0$ e sufficientemente grande $\lambda I_n - B$ è una matrice positiva e si ha

$$V := \lambda I_n - A \ \geq \ \lambda I_n - B := U \geq 0. \tag{11.118}$$

Se $\lambda_0^{(V)} \geq 0$ è l'autovalore massimale di V, deve essere $\lambda > \lambda_0^{(V)}$ per il punto (i) della proposizione 11.7.2, e converge la serie di C.Neumann

$$A^{-1} = (\lambda I_n - V)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{V^i}{\lambda^{i+1}}.$$

Dalla diseguaglianza (11.118) si ha allora la convergenza di

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{U^i}{\lambda^{i+1}} = (\lambda I_n - U)^{-1} = B^{-1} \tag{11.119}$$

da cui segue che esiste ed è positiva B^{-1}. Per il punto (iii) della proposizione 11.7.2, B è una M-matrice.
Per provare che l'autovalore reale minimale $\mu_0(B)$ non può essere inferiore a $\mu_0(A)$, consideriamo un arbitrario numero reale r soddisfacente $r < \mu_0(A)$.
Da $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\Lambda(A - rI_n) > 0$ segue che $A - rI_n$ è una M-matrice. Poiché $B - rI_n$ è, come B, una Z-matrice, e $B - rI_n \geq A - rI_n$, per quanto abbiamo appena dimostrato anche $B - rI_n$ è una M-matrice, ovvero

$$0 \;<\; \mathcal{R}\mathrm{e}\;\Lambda(B - rI_n) \;=\; \mathcal{R}\mathrm{e}\;\Lambda(B)) - r, \tag{11.120}$$

da cui segue $\mathcal{R}\mathrm{e}\;\Lambda(B)) > r$. Attesa l'arbitrarietà di $r < \mu_0(A)$, si conclude che $\mathcal{R}\mathrm{e}\;\Lambda(B)) \geq \mu_0(A)$ e quindi $\mu_0(B) \geq \mu_0(A)$.
c) Si definisca $B = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$. Chiaramente B è una Z-matrice che soddisfa $B \geq A$, quindi per il punto b) è una M-matrice, e vale la

$$\min_{i=1,2,\dots,n} a_{ii} \;=\; \mu_0(B) \geq \mu_0(A). \qquad \blacksquare \tag{11.121}$$

- Esercizio 11.7.5 [M-matrici del secondo ordine] Affinché una Z-matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{12} \leq 0,\; a_{21} \leq 0$$

sia una M-matrice è necessario e sufficiente che sia soddisfatta una delle seguenti condizioni (fra loro equivalenti)

i) $a_{11} > 0$ e $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$;

ii) $\det(A) > 0$ e $\mathrm{tr}(A) > 0$;

iii) in $\Delta_A(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ si ha $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_0 > 0$.

11.8 Riferimenti bibliografici

La letteratura sulle matrici non negative è molto ricca. La monografia

(1) M. Minc "*Nonnegative matrices*" Wiley, 1988

è di lettura piuttosto gradevole. Contiene numerosi argomenti che non sono stati neppure accennati in questi Appunti (matrici doppiamente stocastiche, problemi inversi relativi agli autovalori, congettura di van der Waerden, etc.), mentre per altri presenta una trattazione assai più completa.

(2) R.B.Bapat, T.E.Raghavan "*Nonnegative matrices and applications*" volume 64 della "Encyclopedia of Mathematics and its Applications", Cambridge Univ. Press, 1997

evidenzia i forti legami della teoria delle matrici non negative con la teoria dei giochi, la combinatoria, le programmazione matematica, l'economia e la statistica.
La monografia

(3) A.Berman, R.J.Plemmons “*Nonnegative matrices in the mathematical sciences*”, Academic Press, 1979

è stata aggiornata nel 1993 e copre uno spettro di argomenti molto vasto, che comprende anche le catene di Markov, le M-matrici, la teoria della positività inversa, etc. È di lettura alquanto impegnativa.
Per un'introduzione alla teoria dei grafi e alle proprietà combinatorie delle matrici non negative, il libro di H.Minc può essere utilmente integrato da

(4) R.A.Brualdi, H.J.Ryser “*Combinatorial matrix theory*” volume 39 della “Encyclopedia of Mathematics and its Applications”, Cambridge Univ. Press, 1991

Per il teorema di Coxson-Larson si rinvia all'articolo originale

(5) P.G.Coxson, L.Larson, H.Schneider “*Monomial patterns in the sequence* $A^k b$”, Linear Algebra and its Appl., vol.96, pp.89-101, 1987.

e per le M-matrici, oltre alla monografia di Berman Plemmons, molto illuminante è l'articolo (citato nella nota 15 del capitolo)

(6) Fiedler-Ptack *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors*, Czech Math.J., vol 12, pp. 382-400, 1962.

Per una prima introduzione ai sistemi dinamici lineari positivi si veda il sesto capitolo della più volte citata monografia

(7) D.G.Luenberger “*Introduction to dynamic systems*, Wiley, 1979

mentre una trattazione più approfondita, con numerosi esempi di carattere applicativo, è offerta da

(8) L.Farina, S.Rinaldi “*Positive linear systems: theory and applications*” Wiley, 2000.

La bibliografia sui sistemi positivi sarà integrata alla fine del capitolo 12 .